ELEMENTI

DI

MECCANICA RAZIONALE

ELEMENTI

DI

MECCANICA RAZIONALE

PER

M. ZANNOTTI

Professore di Meccanica razionale nella Regia Università degli Studii; Socio Ordinario del Real Istituto d' Incoraggiamento alle Scienze Naturali; Socio Residente dell'Accademia Pontaniana, e Corrispondente della Società Economica della 1ª Calabria Ulteriore.

Opera adottata dal Consiglio Generale di Pubblica Istruzione per gli aspiranti ai Gradi Accademici presso la Facoltà di Scienze Matematiche.

NAPOLI
STAMPERIA DI FERDINANDO RAIMONDI
1857.

PREFAZIONE.

Gli antichi distinguevano la Meccanica in *razionale* e *pratica*; la prima procedendo per dimostrazioni, la seconda per esperimenti. Ma l'aggiunto di razionale, che essi davano alla Meccanica dimostrativa, non era inteso nel senso che oggi diamo allo stesso vocabolo. La loro *Meccanica razionale*, anzichè una scienza poggiata su principii veduti *a priori*, era piuttosto una teoria delle macchine in equilibrio, prendendo la voce *teoria* in quel medesimo senso, in cui è ricevuta nello studio dei fenomeni fisici. Così, dopo aver rilevato dall'esperienza che le molecole dei corpi sono congiunte per mutua tendenza che rapidamente decresce coll'aumentarsi dell'intervallo molecolare, e che un cangiamento in questo intervallo non manca di aver luogo dietro una variazione di caloricità, noi comprendiamo chiaramente come avvengano la fusione, la gassificazione, la solidificazione, ecc. vedendo in ciascuno di questi fenomeni or il predominio dell'attrazione molecolare, ed or quello della ripul-

sione termica. Similmente si procedeva nello studio della Meccanica, dopo che Archimede ebbe scoverto la ragione di equilibrio nella leva: in ogni macchina si vide una leva trasformata, le cui braccia formavano l' incognita del problema. E del pari che la Fisica prepara gli elementi alla scienza meteorologica, studiando separatamente le leggi della gravità, del calore, dell' elettricismo, ecc.; la Meccanica razionale degli antichi studiava l' equilibrio delle macchine semplici per intenderne la ragione nelle macchine composte. La Fisica e la Meccanica prendevano così una stessa fisionomia logica, e divenivano materia di una stessa disciplina. Donde poi avvenne che fino al cominciamento di questo secolo non appariva Istituzione di Fisica che non contenesse come parte integrante un' esposizione almeno sommaria delle leggi dell' equilibrio e del moto. E poichè l'uso fatto venerando dal tempo suole arrogarsi i diritti della ragione, vediamo tuttora degli autori, daltronde stimabili, esporre compiutamente le leggi dell' equilibrio delle macchine in un trattato di Fisica, e per un trattato di Meccanica razionale esordire nella dottrina del moto coll' esposizione delle leggi seguite dai gravi nella loro libera discesa.

Se alla Meccanica teoretica degli antichi mal si apponeva l' aggiunto di razionale, non sembra che si adatti meglio alle opere dei moderni che portano lo stesso titolo. Questa divergenza dell' idea dalla parola deve attribuirsi alla Filosofia dominante nel tempo in cui si fermarono le basi della moderna scienza delle forze. Prima che in Francia fosse istituita la celebre Scuola Normale, in cui dettarono Lagrangia, Laplace, Monge, Berthollet, Haüy, una differenza secolare talvolta distingueva il progresso accademico dall' insegnamento universitario.

Gli utili trovati dalla scienza, quando non restavano sepolti nelle collezioni accademiche, divenivano materia privilegiata per coloro che avevano saputo elevarsi sulla sfera degli studii comuni. Pensando dover meritare il titolo di geometra quando si erano letti tre o quattro espositori dell' Euclide, necessariamente le opere di Newton, Bernoulli, Eulero, d' Alembert dovevano riuscire inintelligibili. I fondatori della Scuola Normale, elevando gli studii preparatorii all'altezza delle cognizioni meccaniche di quel tempo, iniziarono tra l' Invenzione e la Didattica quella celere corrispondenza, per la quale una nuova idea appena si annunzia nel seno di un' Accademia, e già l' insegnamento ne fa tesoro a pro della generazione che si educa alla scienza.

Ma in quel tempo il sensismo filosofico toccava l' apogeo del suo delirio; ed il concetto matematico più che altro doveva venir guasto da quella falsa teorica del pensiero. Tutte le scienze si vollero lingue, facendo discendere l'uomo fino alla specie del pappagallo — Si pensò dare un ordinamento naturale ai teoremi geometrici, classificandoli come minerali nelle scanzie di un Museo — Non vedendo l'*infinitesimo* che nel suono articolato, si pensò comprimere tra le strettoie dell' algoritmo algebrico il grande ritrovato, di cui Newton e Leibnitz si disputarono la gloria dell' invenzione; e Lagrangia colla *Teoria delle funzioni* pagava questo tributo alla follia filosofica del suo tempo — Le idee di forza e moto, distinte nel concetto filosofico, quando la Dinamica sorgeva colle scoverte di Galilei, e si elevava sublime col libro dei *Principii*, restavano tuttavia confuse nella loro esplicazione matematica. E ciò che la scienza dinamica non aveva fatto per non aver saputo fare, fu assunto per prin-

cipio dalla teorica del senso: quindi per decreto dei filosofi il parallelogrammo delle forze avrebbe dovuto rimaner sempre parallelogrammo dei moti.

Fatte così identiche le idee di forza e moto, per logica necessità la Statica doveva fondarsi sopra i teoremi della Dinamica. E questa veduta, che formava un vero regresso della scienza dopo che Daniele Bernoulli aveva dato una geometrica dimostrazione del parallelogrammo delle forze, lungi dal venir corretta per l'odierno immegliamento dei principii filosofici, si è di tanto estesa da far pretendere che la Statica dovrebbe eliminarsi dai trattati di Meccanica, se la sua incontrastabile utilità nell'arte di costruire non obbligasse a doverla conservare. Quindi è che, sebbene considerata sotto quella gretta originale definizione di *scienza dell' equilibrio*, la Statica non occupa che un posto secondario in molti libri di Meccanica che ci vengono d'oltremonte.

E coi suggerimenti della Filosofia sensista un' altra cagione cospirava ad impedire che la Meccanica potesse raggiungere la meta di scienza razionale. La Dinamica s'iniziava colla scoverta della legge che seguono i gravi nella loro libera discesa; e questa legge è formolata in numeri. Indi ad una legge anche numerica perveniva il Newton, risolvendo il problema statico più arduo del suo tempo, quale fu quello di determinare la risultante delle attrazioni di due sfere omogenee, o composte di strati sferici omogenei. Egli è vero che questo problema si trova geometricamente risoluto nel libro dei Principii, egualmente che tutte le altre quistioni che vi sono trattate; ma facilmente vi si scorge che quella forma non fu scelta per convincimento della preferenza che la Geometria dovesse meritare sul puro algoritmo nello svolgi-

mento delle quistioni meccaniche, ma piuttosto per seguire l'opinione allora dominante, e per la quale si vedeva nella forma geometrica degli antichi l'espressione più conveniente ad ogni verità matematica; o come diceva lo stesso Newton, *ut lumen publicum sustinere valeat*. Eulero nella prefazione al suo egregio trattato di Dinamica, ch' egli intitolava *Meccanica* (tanto l' idea di forza era identificata con quella di moto!) ci fa conoscere come quel suo lavoro avesse origine dalla traduzione algoritmica, che per suo particolare studio egli faceva dei teoremi dinamici contenuti nel libro dei *Principii*. E poichè quei teoremi ne acquistavano la generalità, che difficilmente vi si poteva scorgere per opera di geometrica costruzione, Eulero pensava, ed è purtuttavia l' opinione dei più, che l' algoritmo fosse il mezzo di ricerca meglio appropriato alla natura delle quistioni meccaniche. E se a questi dati storici aggiungiamo l' altro che le disfide tra i matematici del XVII e XVIII secolo cadevano su problemi geometrici formolati a modo di quistioni meccaniche, ne avremo abbastanza per comprendere, perchè fatto adulto il calcolo infinitesimale si pensasse liberare la Meccanica dalle pastoie delle linee, per lasciarla elevarsi alla generalità creduta propria della così detta Analisi. Quindi si pensò che la scienza delle forze fosse pervenuta alla sua meta di perfezione, quando Lagrangia la compendiava in una sola equazione; confondendo così la prodigiosa fecondità del principio delle celerità virtuali, essenzialmente geometrico, colla sua traduzione nei simboli dell' algoritmo.

Or le considerazioni filosofiche, che menavano la Meccanica a divenir analitica, facevano sempre più divergere la mente dei geometri dagli studii, pei quali avreb-

be potuto elevarsi a scienza razionale. Imperocchè è nella natura stessa delle conoscenze che possiamo esprimere col linguaggio del calcolo, che l'equazione o il sistema di equazioni in cui esse si compendiano, sia traduzione di un' idea costantemente riprodotta in tutte la serie delle verità costituenti quella speciale categoria di conoscenze. Così la formola $\frac{m}{d^2}$ in se comprende la ragione di tutti i fenomeni meccanici del sistema mondiano, perchè la forza acceleratrice che li produce, varia direttamente alla massa m dei corpi agenti, ed inversamente al quadrato della loro distanza d. Queste idee, che in se comprendono tutta una scienza, non possono giammai divenir *principii*, prendendo questa parola nel senso che l'è proprio, essendo esse l'ultimo risultamento, anzichè il primo sustrato di quella sintesi che costituisce la scienza. Quindi è che lo spirito della Meccanica analitica va per opposta via a quello della Meccanica razionale. Questa procede componendo su talune semplicissime idee, mentre quella va svolgendo una prima idea complessa; la prima è essenzialmente analitica nel senso filosofico, la seconda essenzialmente sintetica. E poichè la scienza in noi si forma per opera della sintesi, così la Meccanica analitica non potrà giammai assumere la forma di metodo didascalico. Coloro che vogliono giudicare i fatti del pensiero senza conoscerne le leggi, hanno riposto nella difficoltà dell'algoritmo quella di elaborare una buona Istituzione di Meccanica nel senso del sistema analitico; la qual cosa se così fosse, niuno potrebbe apprendere le regole del calcolo aritmetico, stante le grandi difficoltà algoritmiche che sovente s'incontrano nelle quistioni riguardanti la *Teoria dei Numeri*.

Se una mal valutata influenza del calcolo sulla scienza delle forze ha fatto arrestarci alla Meccanica analitica, quando per la miglior condizione degli studii filosofici avremmo potuto elevarci alla Meccanica razionale; oggi daltronde andiamo sempre più divergenti dalla forma pura di questa scienza per due cagioni, che all' opposto avrebbero dovuto promuoverne lo studio. Primieramente parecchi cultori della scienza delle forze hanno ricevuto sì viva impressione dal rapido progredire della Meccanica industriale in conseguenza della perfezionata teorica delle macchine in moto, che il loro pensiero non sa veder altrimenti le forze che sotto l' aspetto di pratica utilità, e quindi di lavoro. Pretendono in conseguenza che l' insegnamento della Meccanica dovesse consistere nello svolgimento della loro idea favorita, e perciò di *lavoro elementare* si ragiona in ogni pagina dei loro trattati. E come colui, che mal si adagia, è tosto costretto a doversi rimuovere, così vediamo la scuola francese, che ha messo innanzi questa idea, non trovar posa dopo aver abbandonato l' insegnamento classico della Meccanica. Essa vagherà sempre da una Istituzione all' altra, finchè non andrà persuasa che il sistema del *lavoro elementare* è così poco ragionevole, per quanto sarebbe quello di voler esordire nell' insegnamento della Geometria colla misura delle fabbriche. Ed in vero, l' idea di lavoro necessariamente racchiude l' idea di resistenza, come di una cosa tanto diversa dalla forza che deve superarla, quanto il fine è diverso dal mezzo adoperato in ottenerlo. Or la Meccanica razionale, considerando che ogni resistenza potrebbe essere identicamente riprodotta da una forza equivalente, ha trovato il mezzo di porle a calcolo, e così ha potuto gui-

dare l' industriale nello stabilimento delle sue macchine. Fate che queste idee ricompariscano diverse al pensiero, e tosto il concetto di Meccanica razionale gli diverrà impossibile. Quindi è che se le idee di lavoro e forza viva costituiscono la naturale transizione dalla teoria alla pratica, esse non potranno divenir giammai fondamento di scienza.

La seconda poi delle annunziate cagioni si trova nell' eccessiva estensione conceduta alle vedute puramente geometriche nelle quistioni relative ai moti. Che il linguaggio della Geometria sia per l' indole stessa della cosa il meglio appropriato a simili quistioni, è una verità che deriva necessariamente dall' idea dell' effetto di una forza, e che la dottrina delle coppie e quella delle celerità virtuali hanno solidamente rifermata. Ma il concetto geometrico vuol essere subordinato al concetto meccanico, poichè questo ha una realtà obbiettiva che formando lo scopo della scienza, deve costituirne il vero punto di veduta. L' intera teorica delle coppie, a modo di esempio, si appoggia all' idea di momento; la quale se sia desunta in modo che lo spirito vegga in essa l' immagine della realtà destinata a rappresentare, la teorica delle coppie sarà una dottrina meccanica; ma se all' opposto l' idea di momento non fosse in fondo che pura convenzione, la teorica delle coppie non avrebbe alcun valore concreto. Questa identificazione della Meccanica colla Geometria pura tornò nonpertanto utilissima nel primo esordire della scienza, quando innanzi di cercare il *reale* doveva stabilirsi il *possibile*. Così se la considerazione del moto nei suoi fenomeni ha prodotto la *Nuova teoria della rotazione dei corpi*, che senza dubbio è il capolavoro della Meccanica moderna; è purtuttavia da riflettersi che si trattava di una teorica da for-

marsi per intero, poichè quella lasciataci dall' Eulero non era in fondo che la soluzione di un problema di Analisi pura. Ma coloro, che imitando il Poinsot nella teorica delle rotazioni, hanno voluto estendere la considerazione del moto nei suoi fenomeni a quelle parti della Meccanica già compiutamente elaborate quanto al moto considerato rispetto alle forze che possono produrlo, essi non si sono avveduti che così facendo riducevano i principii filosofici della scienza a ciò ch' erano, quando Fracastoro scovriva il parallelogrammo dei moti. Imperocchè il principio della Dinamica razionale stando nella cognizione della proporzionalità della forza alla velocità prodotta nell' unità di massa, questa idea fondamentale si oscura quando ripensiamo ai moti nella loro geometrica possibilità. Quindi è avvenuto che parecchi dei moderni autori di Meccanica ritengono come convenzionale la misura della così detta *quantità di moto*, senza considerare che se la cosa andasse precisamente a questo modo, la Meccanica razionale dovrebbe aversi in conto di romanzo matematico.

Chiunque si faccia a contemplare la scienza delle forze nel suo stato attuale, sceverandola dalla forma sistematica che avrà potuto ricevere dai trattatisti, scorgerà di leggieri come vada composta di due parti distinte, la Statica e la Dinamica; la prima avendo per obbietto le leggi della composizione delle forze, la seconda quelle della composizione delle velocità prodotte. Considerando le forze come speciali grandezze, si è pervenuto al teorema del parallelogrammo, che in questo modo si è reso indipendente da ogni dato sperimentale; e la Statica poggiandovi per intero è divenuta una scienza perfettamente razionale.

A rigore logico non possiamo dire altrettanto della Dinamica, che muove dal dato empirico della proporzionalità delle forze alle velocità prodotte nell' unità di massa. Ma da questo dato derivando necessariamente che le velocità debbono comporsi come le forze, la Dinamica si appropria tutti i teoremi della Statica; e così quantunque empirica nel principio, assume forma razionale nello svolgimento delle sue dottrine. Donde poi segue che la Statica è necessario fondamento della Dinamica, non altrimenti che i teoremi geometrici servono di base alla misura dell' estensione. E perciò coloro che vorrebbero la Statica doversi fondare sulla Dinamica, mostrano chiaramente di non aver compreso nulla della natura di queste scienze.

Su gli esposti principii ho compilato questi Elementi, ai quali ho cercato dare, per quanto ho potuto, quella fisonomia logica che meglio si addicesse allo stato attuale della scienza. Perciò ho tolto di mezzo quella vieta distinzione di Statica ed Idrostatica, di Dinamica ed Idrodinamica. Le leggi di composizione delle forze essendo sempre le stesse, sia solido o fluido il sistema dei loro punti di applicazione, la distinzione della Statica dall' Idrostatica è cessata di esser logica dal momento in cui non si è più veduto un dato sperimentale nel principio di egual pressione. Lo stesso deve dirsi dell' Idrodinamica razionale, la quale pone a base delle sue ricerche le stesse leggi di composizione delle velocità, che servono a risolvere le quistioni relative ai moti dei solidi. Ho però limitato questa sezione della Dinamica a quell' estensione che poteva razionalmente ricevere in una esposizione elementare, non avendo potuto giammai comprendere come talune quistioni si potessero collegare a principii, dai quali

non dipendono affatto. Se il meccanico sa stabilire perfettamente le equazioni generali del moto dei fluidi, conosce daltronde che i pochi casi a cui sono applicabili, non sono certamente quelli considerati nell' Idraulica; la quale rimane tuttavia una scienza sperimentale, che si vantaggia delle considerazioni matematiche al pari di ogni altro ramo della Fisica. Volendo all' opposto farne un corollario dell' Idrodinamica razionale, non solamente si osta al suo progresso, attendendo dal calcolo ciò che dalla sola sperienza è dato sperare; ma si viene a falsare l' indole delle deduzioni sperimentali, come ho chiaramente dimostrato nel Libro IV dei miei *Elementi di Fisica.*

LIBRO PRIMO.

STATICA.

CAPO PRIMO.

Introduzione.

Quiete e moto — Definizione della forza — Direzione intensità e punto di applicazione di una forza — Analogia delle quistioni meccaniche coi problemi geometrici — La relazione della forza alla velocità non può essere che empirica — Distinzione delle forze in impulsive e continue — Definizione della risultante — Scopo della Statica — Scopo della Dinamica. Ragione per cui la prima deve precedere la seconda.

1. Un corpo si dice essere nello *stato di quiete*, quando conserva lo stesso luogo nello spazio; e viceversa lo diciamo *in moto*, allorchè passa da un luogo in un altro.

Ciò che ci fa credere costante il luogo di un corpo si è l' osservare invariate le sue distanze da altri corpi che riguardiamo come fissi: laonde se questi avessero un movimento comune, ne parteciperebbe ancora il corpo che ad essi abbiamo riferito, e perciò la sua quiete non sarebbe che *relativa*. Così un edifizio è nello stato di quiete rispetto al suolo che lo sostiene; ma se lo consideriamo nelle sue relazioni collo spazio in generale, egli è veramente in moto, poichè ha comune colla terra il doppio movimento, di rotazione intorno all' asse e di traslazione intorno al sole. E se

di questo centro del sistema planetario consideriamo ancora quel moto progressivo verso la costellazione dell'Ercole, che vi hanno osservato i moderni astronomi, comprenderemo agevolmente come i luoghi dei diversi obbietti fissi sulla superficie terrestre debbano tornare sempre nuovi nei successivi rivolgimenti del nostro pianeta; quindi è probabile che all'idea di *quiete assoluta* non corrisponda veruna realtà obbiettiva.

Il moto, egualmente che la quiete, si distingue ancora in *assoluto* e *relativo*, poichè il variare continuo del sito relativo di un corpo può dipendere o dal moto suo proprio, o da quello dei corpi circostanti. Così gli astri, che ascendono da un lato dell'orizzonte per quindi discendere dall'altro, dichiarano egualmente possibile, sia una rotazione della sfera celeste da levante verso ponente, sia l'opposta rotazione del globo terrestre da ponente verso levante. Soltanto mercè la comparazione di queste apparenze al resto dei fenomeni dinamici del sistema mondiano si poteva decidere quale dei due opposti movimenti fosse reale. E perciò i filosofi antichi, che ignoravano sì la geometria delle proiezioni per poter prevedere le svariate apparenze prodotte nelle relative posizioni dei corpi celesti dal semplice fatto del moto della terra, come ancora le leggi dinamiche dalle quali avrebbero potuto rilevare le inconseguenze cui mena la supposizione della terra fissa, ebbero a fermarsi alle indicazioni immediate del senso della vista, ed ammettere come reale il moto rotatorio della sfera celeste [1].

2. L'osservazione dimostra che giammai un corpo passa dalla quiete al moto senza l'intervento di una cagione esterna. Vi è dunque qualcho cosa che si trasfonde in un corpo,

[1] Se egli è vero che nella scuola di Pitagora s'insegnava il moto della terra, questa dottrina doveva esser ivi sostenuta da una probabilità così debole da confondersi quasi nei limiti di una semplice possibilità.

allorchè urtato, attratto, ec. si pone in movimento: ad essa diamo il nome di *forza*, la quale talvolta non appalesa la sua presenza se non con moto virtuale, vale a dire con tendenza ad un moto che non può attuarsi, perchè un ostacolo invincibile ne assorbe gl' impeti successivi. Così in un grave sospeso o sostenuto vi è continua tendenza a discendere, ma il mezzo di sospensione o di sostegno distrugge gli effetti della continuata trazione o pressione. Laonde diciamo forza tutto ciò che *produce* moto, o almeno *tende* a produrlo.

La prima idea di forza è derivata dal fatto dei moti generati da percossa; quindi è che le leggi dell' urto furono l' obbietto delle prime ricerche dinamiche. Ma quella necessità logica che ci costringe a riconoscere l' identità della cagione nell' identità degli effetti, tosto o tardi doveva condurre a far riguardare come animato da forza ogni corpo che vediamo in moto, quantunque non avessimo osservato il cominciamento di quel moto. Dall' istante, per esempio, in cui abbiamo veduto per la prima volta i pianeti negli spazî del firmamento, li abbiamo conòsciuto *erranti*; ma appunto perchè in essi vediamo un moto, dobbiamo conchiudere che una forza vi è stata impressa.

3. Dall' osservazione apprendiamo ancora che l' effetto di una forza varia a norma della sua direzione, della sua intensità, e della posizione del suo punto di applicazione.

Direzione della forza è quella retta che il mobile percorrerebbe, se non fosse deviato da cagioni estranee a quella che ha prodotto il suo movimento. Così il grave, che scende in un' aria calma, percorre una retta normale alla superficie delle acque stagnanti nel luogo della caduta: questa retta, denominata *verticale*, costituisce la direzione della forza, a cui si è dato il nome di *gravità terrestre*. E se il grave proietto in una direzione obbliqua all' orizzonte descrive una curva, ciò dipende dalla gravità che lo devia continuamente dalla direzione della forza impulsiva; poichè, date le altre cose eguali, lo vediamo tanto meno divergere

dalla tangente alla curva nel suo punto di partenza, per quanto la forza di proiezione sarà stata più grande rispetto al suo peso.

L' *intensità* di una forza non è che la sua quantità, che potremo esprimere numericamente, quando avremo determinato la relazione di grandezza della forza data ad un' altra che avremo tolto ad unità. Così facendo =1 la forza della gravità terrestre sotto il paralello di 45° ed a livello del mare, potremo ottenerne l'espressione numerica per qualunque altezza e latitudine, quando avremo conosciuto da quale funzione di queste due variabili dipende il suo valore. Potremo ancora indicare graficamente le già determinate relazioni di quantità tra più forze, prendendo sulle rette, che ne disegneranno le direzioni, delle parti proporzionali alle loro intensità: ciò che in molti casi tornerà assai semplice, poichè con una sola retta avremo dinotato ad un tempo la direzione e la grandezza della forza.

Finalmente, diciamo *punto di applicazione* quel punto di un corpo, su cui va immediatamente l'azione della forza. La gravità, per esempio, essendo una forza molecolare, avrà rispetto ad un dato corpo tanti punti di applicazione, quante ne sono le molecole.

4. Da ciò che precede si rileva chiaramente che la determinazione di una forza non è che la definizione di un retta di data lunghezza, di assegnata direzione ed applicata ad un certo punto. Quindi si comprende come le quistioni relative alle forze possano assumere la forma di probemi puramente geometrici.

5. La natura delle forze ci è del tutto ignota: ne conosciamo la sola esistenza per quel legame logico che nel nostro intelletto unisce indissolubilmente l'idea di effetto a quella di cagione. Effetto di una forza è la velocità impressa al mobile; questa dunque sarà proporzionale alla grandezza della forza, come l'effetto è di sua natura proporzionale alla cagione che lo produce. Ma questa idea di proporzionalità non

contiene necessariamente l' altra di rapporto semplice; vale a dire che non è logicamente necessario rendere una forza n volte più grande, perchè si abbia una velocità n volte maggiore. Ed in vero la legge razionale della proporzionalità sarebbe egualmente soddisfatta ponendo le relazioni

$$\varphi = n\sqrt{v}, \quad \varphi = n.v^2, \text{ ec.}$$

ed in generale

$$\varphi = n.f(v),$$

indicando φ la forza, $f(v)$ una funzione qualunque della velocità v, ed n un fattore costante ch' esprime la legge di proporzione. Spetterà poi all' esperienza decidere quale delle possibili nature di $f(v)$ sia quella che si trovi realmente attuata nel sistema mondiano.

6. È ancora da considerarsi il modo di comunicazione delle forze, e pel quale esse si distinguono in *impulsive* e *continue*. Le prime si trasfondono nei corpi con un impeto solo, e perciò in un istante indivisibile; producendo una velocità costante che si conserverebbe inalterata, se il mobile non ne perdesse successivamente contro gli ostacoli che incontra sul suo cammino. Le forze continue poi si accumulano nei corpi mercè una serie d' impulsi successivi, sottoposti alla legge di continuità; donde risulta una velocità varia, che sarà funzione del tempo durante il quale la forza avrà ripetuto i suoi conati. Così la gravità, forza continua, fa pervenire i corpi al termine della loro caduta (quando essi scendono per una frazione piccolissima del raggio terrestre) con una velocità proporzionale al tempo della loro discesa.

Purtuttavia è da osservarsi che tutte le forze conosciute son continue. L' urto medesimo, donde le forze istantanee hanno tolto l' aggiunto d' *impulsive*, ha una certa durata che si rende sensibile in taluni fenomeni dei corpi elastici. Quell' impeto elettrico, ch' è *lampo* in una nube temporale-

sca e *scintilla* nell'apparecchio del fisico, è ancor esso manifestazione di forza continua, quantunque la sua durata non sia che di qualche milionesimo di secondo. L'idea di forze puramente impulsive, sorta in un tempo, in cui non si vedea neanche la possibilità di quei metodi mirabilmente semplici, che a giorni nostri sono stati attuati da Wheatstone e da Arago per misurare i milionesimi di secondo, ciò non ostante è d'uopo conservarla per tradurre in algoritmo gli effetti delle forze continue, non ammettendo purtuttavia altra distinzione reale delle forze che quella di *permanenti* e *temporarie*.

7. Se un corpo sia sottoposto nel tempo stesso a più forze che lo spingano in diverse direzioni, vedremo che seguirà nel suo moto una certa direzione, quasi sempre diversa da ciascuna di quelle che avrebbe seguito, se ciascuna delle forze fosse stata sola in agire. Or egli è facile comprendere come una sola forza, la quale con una certa intensità avesse spinto il corpo nella stessa direzione del suo moto, avrebbe prodotto lo stesso effetto. Tutte quelle forze contemporanee si sono dunque composte in una sola, che prende il nome di *risultante*, mentre le forze da cui deriva, prendono il nome di *componenti*.

8. La scienza che stabilisce le leggi della composizione delle forze, dicesi *Statica*. In essa non vi è distinzione di forze continue da impulsive, poichè le loro azioni si valutano pel solo istante, in cui convengono sopra un punto o sopra un sistema di punti; e per quell' istante di simultaneità tutte le forze possono riguardarsi come impulsive. Quindi avviene che nelle quistioni relative alla composizione delle forze la considerazione del tempo non entra giammai come elemento essenziale; ma può soltanto intervenirvi come elemento della funzione che dovrà rappresentare il valore della forza continua nell' istante in cui essa unisce la sua azione a quella di altre forze date.

Nè tampoco vi avremo a considerare la speciale funzione

della velocità a cui dovrà essere proporzionale la forza corrispondente, poichè (come vedremo nel capo seguente) le leggi della composizione delle forze sono indipendenti dalla loro relazione alle velocità prodotte.

9. Se la Statica pone le leggi della composizione delle forze ossia delle cagioni del moto, la *Dinamica* viceversa ha per obbietto le leggi della composizione delle velocità, come effetti delle forze. Donde poi risulta che, a differenza della Statica, la quistione cardinale della Dinamica è riposta nell'esatta definizione della funzione della velocità, a cui dev' essere proporzionale il valore di una forza.

La Statica e la Dinamica, riunite in un corpo di dottrina, costituiscono la *Meccanica razionale*, distinta per questo aggiunto dalle sue applicazioni ai fenomeni fisici, agli effetti delle macchine, ed alle costruzioni architettoniche. Delle quali due branche della Meccanica la prima, cioè la Statica, deve aversene come il fondamento naturale, poichè partendo essa dalla semplice nozione di forza, e prescindendo in conseguenza da ogni dato di osservazione, comunica ai suoi risultamenti quella generalità propria di una scienza razionale, e prepara in tal modo dei principî utili alla Dinamica; la quale, poggiata interamente sul dato empirico della ragione semplice che unisce la velocità alla forza, diviene razionale applicando alle velocità la legge di composizione delle forze [1].

[1] Queste definizioni mal si accordano con quelle che si trovano in tutti i trattati di Meccanica. L'idea comune è che la Statica debba occuparsi delle condizioni di equilibrio, e la Dinamica delle leggi del moto.

Egli è vero che la conoscenza delle condizioni di equilibrio di un sistema di forze conduce facilmente alla determinazione della loro risultante; ma non è poi logico il confondere il vero obbietto di una scienza coi mezzi che la sussidiano, ovvero colle applicazioni che può farsene. Se così non fosse, bisognerebbe dire che non solo la Statica, ma la Dinamica ancora non avesse altro scopo che la ricerca delle leggi di equilibrio, considerando come

CAPO SECONDO.

Composizione di più forze agenti sopra uno stesso punto.

Principio fondamentale della Statica — Misura delle forze — Legge del parallelogrammo — Conseguenze immediate di questa legge — Proprietà statica dei poligoni piani — Risoluzione di un problema — Poligono delle forze — Equazioni generali dell' equilibrio di più forze agenti sopra uno stesso punto — Loro indipendenza dalla speciale inclinazione degli assi — Parallelepipedo delle forze — Significato della forma $\frac{0}{0}$ che nel caso di equilibrio assumono i coseni degli angoli formati dalla risultante coi tre assi — Espressione della risultante in funzione delle intensità delle forze e delle loro mutue inclinazioni — Condizione di equilibrio di un punto che giace sopra una superficie o linea curva — Necessità di due equazioni per la superficie e di una sola per la curva.

10. Fondamento di tutta la Statica è il seguente semplicissimo principio — *Se più forze* P_1, P_2, P_3, ... *in una me-*

i problemi dinamici, che alimentavano le nobili gare dei geometri del XVIII secolo, avessero scemato d' importanza, dopo che d' Alembert ebbe dimostrato come ogni problema dinamico possa ridursi ad una quistione di equilibrio. E dietro queste facili osservazioni non comprendiamo come gli autori di Meccanica si facciano ad esporre nella Statica le leggi delle attrazioni delle sferoidi, che non riguardano condizioni di equilibrio, ma presentano uno dei casi più rilevanti della composizione delle forze.

Quanto poi all' ordinaria definizione della Dinamica, essa è vaga, poichè non esprime se la scienza debba ricercare le leggi fenomenali del moto, ovvero (ciò che maggiormente interessa, quando si voglia porre la Dinamica alla testa delle scienze naturali) le leggi del moto nella loro dipendenza dalle forze motrici. In queste due diverse vedute stanno i caratteri che distinguono le scoverte dinamiche di Galilei da quelle di Newton. Il sommo Italiano nell' esporre le leggi della discesa dei gravi pei piani inclinati (Ved. *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, ec. — *Giornata terza*) parte dal postulato, che

desima direzione e nel medesimo senso agiscono sopra un punto materiale, esse vi produrranno la medesima azio-

d' altronde egli cerca rifermare con ingegnosi sperimenti, che qualunque sia l' inclinazione di un piano all' orizzonte, la velocità di un grave che per esso discende, sarà in ogni punto della discesa eguale a quella che avrebbe acquistato cadendo liberamente per un' eguale altezza verticale. Or se egli, che aveva fatto un uso stupendo della composizione dei moti nel definire la traiettoria dei proietti nel vôto, avesse riguardato sotto il medesimo aspetto la composizione delle forze, avrebbe trasformato il suo postulato in un teorema di facilissima dimostrazione. Al contrario meditando il libro dei *Principi* vi si scorge chiaramente che il più gran passo fatto dare alla scienza con quella serie di memorande scoverte, sia stato quello di trovare la legge della composizione delle forze, mentre Newton non aveva ricevuto dai suoi predecessori che la legge fenomenale della composizione dei moti.

Del resto le comuni definizioni della Statica e della Dinamica convenivano assai bene a queste scienze nella loro origine. Le macchine, accrescendo prodigiosamente gli effetti delle potenze, fissarono l' attenzione dei filosofi antichi sulle condizioni necessarie all' equilibrio, e somministrarono così il primo germe di quella scienza che poi denominarono *Meccanica* da una voce greca che suona *macchina*. Fu sul principio una scienza sperimentale, e perciò riguardata come parte integrante della Fisica, in cui taluni autori moderni vogliono tuttavia conservarla sotto la forma primitiva. Archimede le diede un principio di ordinamento razionale, scovrendo la ragione della potenza al peso nella leva; e fino a Newton che il primo si fece a presentare il parallelogrammo delle forze sotto un aspetto soddisfacente, i meccanici non seppero far di meglio che ridurre ogni macchina semplice alla leva, non altrimenti che si fa nelle ricerche fisiche, nelle quali si ha per ispiegato un fenomeno, quando se n' è dimostrata l'analogia con qualche fatto noto.

Di leggi del moto poi gli antichi non ne conobbero alcuna, tranne qualche ovvia nozione sul moto uniforme. Non videro altra manifestazione della forza che l' urto; e considerando come semplici proprietà della materia quei fenomeni che oggi riguardiamo come effetti di forze continue, di queste non ebbero alcuna idea. Perciò l' astronomia, volendo conciliare l' immobilità della terra colle apparenze planetarie, moltiplicava epicicli a suo bell'agio,

ne che vi avrebbe prodotto la forza $R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ — o in altri termini — *Più forze agenti sopra un punto materiale nella stessa direzione e nel medesimo senso, hanno una risultante eguale alla loro somma.*

Ed in vero poniamo che fosse $R < P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ In questa ipotesi una o più delle forze P avrebbe dovuto patire una certa diminuzione: ma una forza non può esser diminuita che dall' azione di una forza contraria; nella nostra ipotesi dunque si avrebbe diminuzione di una o più delle forze P, senza che alcuna di esse tendesse a scemare le azioni delle altre: si avrebbe dunque un effetto senza causa, ciò ch' è assurdo. Egualmente assurda sarebbe l' ipotesi di $R > P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, poichè si avrebbe aumento di una o più delle forze P, senz' addizione di nuova forza [1].

senza darsi il menomo pensiero del prodigioso concorso di forze che sarebbe stato necessario per attuare quel fantastico concetto. L' origine di una Dinamica positiva, ma fenomenale, è dovuta a Galilei, che ne poneva le prime basi colla scoverta delle leggi che seguono i gravi nella loro discesa, ed a questa forma primitiva della scienza corrisponde la definizione che se ne dà comunemente.

[1] Il signor Schnuse nella sua egregia opera — *Die Grundlehren der Statik fester Körper. Leipzig* 1851 — così si esprime a pag. IV. « Tutte le così dette puramente analitiche o geometriche dimostrazioni del parallelogrammo delle forze, anche quelle di Bernoulli, Poisson, ec. sono interamente illusorie. Dapoichè se sopra un punto materiale si fanno agire n eguali forze p nel medesimo senso e nella stessa direzione, non è chiaro *a priori* che l' unica forza P che valga a tenere in equilibrio le n forze p, debba essere ancora n volte più grande della forza p; ovvero in generale: che la risultante di due o più forze P, Q, R,... agenti sopra un punto materiale nella stessa direzione e nel medesimo senso, sia eguale alla loro somma $P + Q + R + \ldots$ Allora si potrà venire a questa conclusione, quando già si conosca che le forze rimangono l' una dall' altra *indipendenti* e ciascuna agisce come se fosse *sola*; la qual cosa può esser dimostrata dalla sola *esperienza*, ma non potrà ricevere giammai una dimostrazione *a priori*, come non potrebbero riceverla la legge dell' attrazione newtoniana, la legge di Mariotte, ec. Ma se poniamo come principio la *reciproca indi-*

11. Se due forze eguali agiscono in opposte direzioni sopra un punto materiale, è evidente che non vi potranno in-

pendenza di più forze agenti sullo stesso punto, il parallelogrammo delle forze ne risulterà come corollario, ciò che nessuna delle lunghe dimostrazioni analitiche o geometriche oserebbe fare ».

Se il 1° volume della 2ª edizione dei miei *Elementi di Fisica* non avesse la data del 1839, si potrebbe credere che le osservazioni ivi da me fatte sul merito logico delle dimostrazioni analitiche e geometriche del parallelogrammo delle forze, le avessi attinto dall'autore alemanno, da cui ho tolto il passaggio precedente. Nè dico ciò per rifermare quelle mie osservazioni; che anzi avendovi più ponderatamente meditato, ho rinvenuto ch'esse non reggono affatto ad una critica rigorosa. E la cagione della falsa veduta che Schnuse ed io abbiamo seguito, sta nel non aver considerato la differenza che passa tra l'idea di forza riguardata come grandezza, e l'idea di forza riguardata come cagione di velocità, vale a dire che non abbiamo distinto con sufficiente esattezza il carattere logico della Statica da quello della Dinamica.

La Statica, poggiata soltanto sull'idea di forza come grandezza, è una scienza eminentemente razionale; e nel testo abbiamo veduto come l'equazione $R=P_1+P_2+P_3+\ldots$ derivi necessariamente da una tale idea, senza veruna relazione alla velocità che può esserne effetto. Ma dalla stessa equazione, come vedremo, risulta la legge del parallelogrammo delle forze; dunque questa legge starà, qualunque sia per essere la relazione della velocità alla forza, e perciò essa non ha bisogno di qualsiasi dato empirico.

Al contrario chiamando V, v_1, v_2, v_3,... le velocità prodotte da R, P_1, P_2, P_3,... avremo (n° 5).

$R=mf(V)$, $P_1=mf(v_1)$, $P_2=mf(v_2)$, ec. I quali valori sostituiti nell'equazione $R=P_1+P_2+P_3+\ldots$ ci daranno

$$f(V)=f(v_1)+f(v_2)+f(v_3)+\ldots;$$

equazione che non potrebbe offrire, verun principio alla Dinamica poichè lascerebbe ignota la natura della funzione f. Ma quando l'esperienza ci avrà dimostrato, come vedremo nel 3° libro, che

$$f(v_1)+f(v_2)+f(v_3)+\ldots=f(v_1+v_2+v_3+\ldots),$$

allora ne risulterà l'equazione

$$V=v_1+v_2+v_3+\ldots$$

generare movimento alcuno. Questa quiete, prodotta dal contrasto di forze eguali, nomasi *equilibrio*.

Viceversa, se due forze applicate ad un corpo in opposte direzioni, lo tengono in equilibrio, esse saranno necessariamente eguali. Ed in generale due sistemi di forze, che reggano in equilibrio il corpo, sul quale agiscono, si diranno *equivalenti*; ed è facile comprendere che per essere equivalenti, dovranno produrre risultanti eguali ed opposte.

Or qualunque sia la forma speciale data al metodo di misura di una forza, vi troveremo sempre un'applicazione della idea di forze eguali. Così quando determiniamo l'intensità di una forza con un certo numero n, altro non diciamo se non che essa farebbe equilibrio ad n forze eguali, che agissero in direzione opposta alla sua, ed una delle quali abbiamo tolto ad unità di misura.

Dall'idea di forze eguali risulta ancora che se più forze agenti sullo stesso punto e nella medesima linea, non avessero tutte la stessa direzione, allora chiamando P_1, P_2, P_3, ec. quelle dirette in un certo senso, e Q_1, Q_2, Q_3, ec. le altre dirette in senso opposto, sarebbe la loro risultante

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots).$$

Ed in vero, eccetto il caso di

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

nel quale si avrebbe ad evidenza l'equilibrio del punto, e

da cui deriva come corollario la legge del parallelogrammo delle velocità, ch'è appunto il principio fondamentale della Dinamica. Or a questo parallelogrammo, e non a quello delle forze, convengono le osservazioni del dotto autore alemanno sulla necessità di un principio empirico. Ed in vero la dimostrazione del parallelogrammo delle forze data da Schnuse, identica a quella che si trova nei miei *Elementi di Fisica*, nel fatto non è che la dimostrazione del parallelogrammo della velocità, poichè non considera le forze che nei loro effetti.

quindi $R=o$, in ogni altro caso la prima somma dovrà essere maggiore o minore della seconda; dimodochè indicandole col segno Σ, avremo

$$\Sigma P=\Sigma Q\pm D,$$

ed in conseguenza

$$\Sigma P-\Sigma Q=\Sigma Q\pm D-\Sigma Q.$$

Le due forze $\Sigma Q, -\Sigma Q$ come eguali ed opposte si distruggeranno a vicenda, ed il punto sarà sottoposto all' azioue della sola forza D, che lo spingerà nel senso delle P o delle Q, secondochè la prima somma sarà maggiore o minore della seconda.

12. *Se due forze* P *e* Q *(fig. 1), rappresentate in quantità e direzione dalle due rette* AB *ed* AD, *agiscano contemporaneamente sul punto materiale* A, *esse daranno una risultante rappresentata in quantità e direzione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette* AB *ed* AD.

Per dimostrare questo teorema, che riassume tutta la Statica, è d' uopo premettere

— 1° Che le due forze dovranno necessariamente comporsi in una sola, poichè sarebbe impossibile che il moto del punto avvenisse contemporaneamente per AB ed AD.

— 2° Che questa risultante dovrà giacere nel piano delle due forze. Poichè se la supponiamo fuori di esso, allora immaginando applicata in direzione opposta alla P *(fig. 2)* una forza eguale P_1, ed alla Q similmente un' altra eguale Q_1, è chiaro che il punto A dovrà rimanere in equilibrio, e perciò la risultante di P e Q dovrà essere eguale ed opposta a quella di P_1 e Q_1. Ma se la risultante di P e Q divergesse dal piano di queste due forze, dal medesimo lato dovrebbe divergerne quella di P_1 e Q_1; le due risultanti in vece di stare per diritto, sarebbero inclinate sotto l' angolo $2(\pi-\varphi)$, chiamando φ l'angolo di divergenza di una di esse dal pia-

no delle sue componenti, e l'equilibrio sarebbe impossibile. È dunque impossibile ancora che la risultante si allontani dal piano delle due componenti.

— 3° Che la risultante dovrà giacere nell'angolo delle due componenti. Ed in vero, la forza P (*fig. 1*) tendendo a deviare da AD verso AB il moto che produrrebbe la forza Q, e questa viceversa tendendo a deviare da AB verso AD quello che sarebbe generato da P; è chiaro che la tendenza al moto, risultante dall'azione simultanea delle due forze, dovrà essere diretta secondo una linea giacente nell'angolo DAB.

— 4° Che se le due componenti sono eguali, la risultante dividerà in due parti eguali l'angolo della loro inclinazione. Imperocchè, ponendo la forza P in vece di Q e viceversa, è chiaro che la direzione della risultante dovrà rimanere inalterata nell'ipotesi di $P=Q$; ma ciò sarebbe impossibile, se la risultante non bisecasse l'angolo delle due componenti.

Premessi questi semplicissimi teoremi, passiamo a vedere come la legge del parallelogrammo sia una conseguenza necessaria dell'equazione fondamentale $R=P_1+P_2+P_3+\ldots$

Sia ABCD (*fig. 1.*) un parallelogrammo, la di cui diagonale AC faccia coi due lati AB, AD gli angoli BAC, DAC commensurabili coll'angolo retto, dimodochè si abbiano le proporzioni

$$\mathrm{BAC} : 180^\circ = a : m$$
$$\mathrm{DAC} : 180^\circ = b : m,$$

a, b, m dinotando numeri interi e positivi. Or immaginiamo pel punto A condotte m linee rette, le quali dividano tutto lo spazio intorno al punto A in $2m$ angoli eguali, ciascuno dei quali sarà in conseguenza eguale a $\frac{180^\circ}{m}$. La diagonale AC coinciderà necessariamente con una delle m linee: la AB cadrà sull'a^{esima} linea da un lato di AC, e la AD sulla b^{esima} dall'altro lato. Indi s'immagini ciascuna delle tre rette AC, AB, AD proiettata rettangolarmente sopra ognuna del-

le m linee: in ognuna di queste si avranno così tre proiezioni, che riguarderemo come espressioni delle grandezze e direzioni di tre forze agenti sul punto A. Chiamiamo Ac_1, Ac_2,... Ac_m le proiezioni di AC sopra le m linee; e similmente Ab_1, Ab_2,... Ab_m, Ad_1, Ad_2,... Ad_m le corrispondenti proiezioni di AB ed AD, avremo per una proprietà del parallelogrammo [1]

$$Ac_1 = Ab_1 + Ad_1$$
$$Ac_2 = Ab_2 + Ad_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$Ac_m = Ab_m + Ad_m.$$

Dunque ciascuna delle forze Ac è eguale alla risultante delle corrispondenti forze Ab ed Ad; e perciò se dinotiamo con S(Ac), S(Ab), S(Ad) i sistemi delle forze Ac, Ab, Ad, sarà il sistema S(Ac) equivalente all'azione congiunta dei sistemi S(Ab) ed S(Ad); o più semplicemente, chiamando γ, β, α le risultanti di S(Ac), S(Ab), S(Ad), sarà γ equivalente a β ed α, vale a dire che sarà γ risultante di β ed α.

Or le risultanti γ, β ed α sono dirette secondo le linee AC, AB, AD. Ed invero essendo eguali le proiezioni di AB su quelle rette m, che situate ai lati opposti di AB, fanno con questa angoli eguali, la risultante delle forze rappresentate dalle due proiezioni eguali sarà diretta secondo la stessa AB;

[1] Pel vertice A del parallelogrammo ABCD (*fig. 3.*) si conduca comunque la retta Ax, sulla quale si proiettino ad angolo retto i lati AB, AD, e la diagonale AC. Essendo eguali i due triangoli ABB', CDm, sarà AB'=Dm=D'C'; quindi

$$AC' = AD' + D'C' = AD' + AB',$$

vale a dire che la proiezione della diagonale è eguale alla somma delle proiezioni dei due lati; prendendo però l'espressione *somma* nel senso algebrico, poichè le proiezioni dei lati potrebbero avere opposte direzioni, ed allora in vece bisognerebbe prenderne la differenza.

ed essendo inoltre il sistema S(Ab) composto di queste tali coppie di forze equali e di una forza diretta secondo AB, in questa medesima linea dovrà necessariamente cadere la risultante β. Similmente si dimostrerà che α e γ saranno dirette secondo AD ed AC.

Inoltre dalla natura stessa della rappresentazione delle forze per mezzo di linee risulta, che se più forze agenti sopra un punto materiale siano modificate soltanto in grandezza secondo un rapporto costante, la risultante varierà di grandezza secondo lo stesso rapporto, ma conserverà la prima direzione. Quindi se facciamo variare nella ragione di AB : AD ciascuna forza del sistema S(Ad), la risultante α senza mutar direzione resterà alterata secondo la stessa ragione; e se dopo aver così modificato il sistema S(Ad), lo facciamo girare intorno al punto A da sinistra a destra finchè la direzione di AD coincida con AB, il sistema S(Ad) diverrà identico al sistema S(Ab); ed in conseguenza avremo

$\beta=\alpha\frac{AB}{AD}$. Similmente si dimostrerà che $\gamma=\beta\frac{AC}{AB}$: quindi

$$\gamma : \beta : \alpha = AC : AB : AD ;$$

vale a dire che le due componenti β ed α, e la loro risultante γ hanno tra esse la medesima ragione che intercede tra i due lati di un parallelogrammo, simile ad ABCD, e la sua diagonale. Quindi se facciamo α=AD, sarà β=AB e γ=AC; ossia che la risultante di due forze applicate sotto un certo angolo ad un punto materiale, sarà espressa in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette che rappresenteranno le grandezze e direzioni delle componenti.

Questa conclusione è rigorosa nel caso che gli angoli formati dalla diagonale coi lati contigui del parallelogrammo siano commensurabili coll'angolo retto. Ma poniamo che questa razionalità non esistesse, e fingiamo in primo luogo che

non essendo razionale coll'angolo retto alcuno dei due angoli CAB, CAD (*fig. 4*), purtuttavia la loro somma BAD vi abbia una misura comune. Or se in tale ipotesi non è la diagonale AC la risultante delle forze rappresentate da AB ed AD, sia essa diretta secondo AE, e tagli in conseguenza il prolungamento di BC in un punto E. Allora si determini, ciò che sarà sempre possibile, un punto F tra C ed E, tale che l'angolo DAF e quindi BAF, sia razionale. Condotta pel punto F una parallela ad AB, che taglierà la AD in un punto G, sarà (per la dimostrazione precedente) AF la risultante di AB ed AG, cioè di AB, AD e DG, vale a dire di una forza diretta secondo AE e di un'altra diretta secondo AD ed eguale a DG: ma ciò è impossibile, poichè la risultante di due forze deve sempre cadere nell'angolo da esse formato. E nello stesso modo potendosi dimostrare che la risultante di AB e AD non può cadere nell'angolo CAB, è chiaro che essa dovrà necessariamente coincidere colla direzione della diagonale AC.

In secondo luogo sia irrazionale anche la somma degli angoli CAD e CAB (*fig. 5*). Se le due forze AB ed AD sono eguali, e perciò il parallelogrammo è un rombo, non vi è bisogno di dimostrare che la risultante andrà diretta secondo la diagonale AC. Poniamo dunque che le due forze siano diseguali, che AB sia la maggiore, e che la risultante cada, come AE, nell'angolo CAD. Si descriva un cerchio, di cui D sia il centro e DC il raggio; e sull'arco compreso nell'angolo CAE si determini, ciò che sarà sempre possibile, un punto G tale che l'angolo ADG, ed in conseguenza (compiuto che sarà il parallelogrammo ADGF) l'angolo DAF sia razionale: sarà, per ciò che precede, AG la direzione della risultante di AD ed AF. Ma AB ed AF sono due forze eguali, di cui la prima fa colla forza minore AD l'angolo BAD maggiore dell'angolo FAD che vi forma la seconda; dovrà dunque la risultante di AB ed AD fare con quest'ultima un angolo più grande di quello che vi farà la

risultante di AF ed AD [1]: dunque la risultante di AB ed AD non può essere diretta secondo AE, vale a dire che non può cadere nell' angolo CAD. Similmente si dimostrerà che non può cadere nell' angolo CAB; dunque dovrà seguire la direzione della diagonale AC.

E nel caso d' incommensurabilità la diagonale disegnerà non solo la direzione della risultante, ma la grandezza ancora. Ed in vero poniamo che la grandezza della risultante non sia espressa dalla diagonale AC (*fig. 7*), ma da AC' che potrà essere minore o maggiore di AC. Si prenda sulla BC un punto qualunque H, e per questo punto si conduca HI parallela ad AB; si tagli AK=DI, e si conduca KH. Sarà AKHC un parallelogrammo, e la diagonale AH disegnerà la direzione della risultante di AB ed AI, ossia di AB, AD ed AK, o in fine di AC' ed AK. Ma ciò è impossibile poichè condotta C'H' parallela ad AK, la risultante di AC' ed AK dovrebbe essere diretta secondo AH' e non già secondo AH; dunque è anche impossibile che la grandezza della

[1] Siano Q e Q' (*fig. 6*) le due forze eguali, ciascuna maggiore di P; e sia R la risultante di Q e P, la quale farà colla componente Q un angolo minore di quello che forma colla P, e ciò in conseguenza del principio che la risultante di due forze eguali deve bisecare l' angolo della loro inclinazione. Immaginiamo al punto A applicate le due forze opposte Q e Q'', ciascuna eguale a Q'; sarà la risultante di Q' e P la stessa che quella di Q', Q'', Q e P, ossia di Q', Q'' ed R, poichè abbiamo supposto che quest' ultima fosse la risultante di Q e P. Ma Q' e Q'' come eguali daranno una risultante R'' che bisecherà Q'AQ''; dunque la risultante di Q' e P sarà ancora risultante di R ed R'', la quale finchè si abbia l'angolo RAR''<180°, sarà come R' compresa nello spazio RAR'', e quindi farà colla forza P un angolo maggiore di quello che vi forma la R. Or perchè si abbia RAR''<180° è necessario che, condotta la bisecante xx' dell' angolo QAP, sia l'angolo QAR<QAx, vale a dire che sia Q>P. Se fosse Q<P, si potrebbe avere l'angolo RAR''=180° o RAR''>180°: nel primo caso R' ed R coinciderebbero nella stessa direzione, nel secondo R' cadrebbe tra R e P.

risultante sia diversa dalla lunghezza della diagonale AC [1].

13. Dal teorema del parallelogrammo derivano immediatamente i seguenti corollari.

[1] La legge del parallelogrammo delle forze è facilmente dichiarata dal principio della composizione dei moti; così, per esempio, si trova dimostrata nel libro dei *Principi*. Ma poichè questo genere di dimostrazione stabilisce tacitamente una dipendenza, d'altronde non necessaria, tra la legge del parallelogrammo e la relazione della velocità alla forza, perciò vuol esser eliminato dalla Statica razionale. Restano così a dichiarare questa legge le sole dimostrazioni puramente analitiche o puramente geometriche, stabilite sull' idea di forza riguardata come speciale grandezza. Ma le prime, oltre al non poter essere abbastanza elementari, hanno il difetto di presentarsi sotto una forma estranea alla natura del problema; imperocchè la traduzione matematica di una quistione meccanica vuol esser fatta nella lingua della pura Geometria, essendo l' idea di linea inseparabile dal concetto di forza: nè l'Analisi può altrimenti intervenirvi se non come possente ausiliatrice della scienza dell' estensione. Quindi si comprende perchè la Statica e la Dinamica razionale non altronde ripetano la loro origine, che da costruzioni geometriche. Nasceva la prima col parallelogrammo delle forze, scoverto da Fracastoro; e la seconda si annunziava colla costruzione della traiettoria dei proietti nel vôto, ritrovata da Galilei. Nè giammai artificio algoritmico ha potuto spingere queste due scienze ad un progresso pari a quello che hàn fatto in virtù della teorica delle *coppie* e del principio delle celerità virtuali, due dottrine che essenzialmente geometriche, hanno ridotto ad un canone semplicissimo le quistioni più ardue intorno all' equilibrio ed al moto. « Nulla vi ha di più bello (diceva Chasles nel suo discorso inaugurale alla cattedra di Geometria Superiore nella Facoltà delle Scienze di Parigi — Vedi la sua opera *Traité de Géometrie Supérieure. Paris* 1852) di quelle considerazioni dirette e lucide, e per così dire pittoresche, per mezzo delle quali un geometra solenne, trasportando nella Dinamica l'ingegnosa dottrina delle coppie, ci ha svelato tutte le circostanze geometriche e dinamiche del doppio movimento di un corpo pesante che ha ricevuto un impulso. Eulero e d'Alembert avevano, quasi nel medesimo tempo, risoluto analiticamente una tal quistione, che più tardi fu trattata da Lagrangia con miglior ordine e maggiore eleganza. Ma in queste soluzioni, che mercè formole di quadrature danno la posizione del

— 1° Essendo rappresentate dai tre lati del triangolo ABC (*fig. 1*) le grandezze ed inclinazioni delle componenti P e Q e della loro risultante R, ne segue che chiamando θ l'angolo delle due componenti, e β ed α gli angoli che la risultante R forma colle forze P e Q, dovranno essere soddisfatte le due relazioni

$$R : P : Q = sen\theta : sen\alpha : sen\beta,$$

ed

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta},$$

equazione che disegnando la dipendenza del lato AC dagli altri due AB, BC e dall'angolo $\pi - \theta$ ch'essi comprendono, esprime il valore della risultante in funzione dei valori delle componenti e dell'angolo di loro inclinazione.

Dalla prima relazione poi derivano le due seguenti;

$$sen\,\alpha = \frac{P sen\theta}{R}, \quad sen\beta = \frac{Q sen\theta}{R}.$$

corpo ad un certo istante del tempo, non si veggono che calcoli, i quali dando la soluzione numerica del problema, ossia la posizione attuale del corpo, non fanno poi conoscere in qual modo vi sia giunto; nè come ad ogn' istante si modifichi l' effetto dell' azione permanente dell' impulso primitivo. Mercè le sole risorse del ragionamento geometrico, Poinsot rende palpabili, e quasi dipinge all' occhio tutte le circostanze del movimento del corpo. A guisa delle forze acceleratrici, la cui considerazione è già familiare ai geometri, egli considera nel moto del corpo una *coppia acceleratrice*, la quale combinandosi colla rotazione, non altrimenti che una forza acceleratrice con un' altra d'impulso, muta ad ogn' istante la grandezza di questa rotazione e la direzione dell' asse intorno a cui si attua; e questo doppio effetto lo seguiamo, per così dire coll' occhio, mentre il nostro spirito ne vede le cagioni ».

Dietro tutte queste considerazioni la scelta tra una dimostrazione analitica ed una puramente geometrica non poteva presentarmi dubbio alcuno. Quella che ho esposto, è la più semplice e diretta che si conosca: la si deve a Möbius, che l' ha pubblicata nel Giornale di Crelle, donde l' ho tratta.

Le quali due equazioni dimostrano (come già sappiamo dal teorema che pone la risultante nell'angolo delle due componenti) che la risultante farà colla componente maggiore un angolo più piccolo di quello che forma colla componente minore. Ed in vero, se nelle due ultime equazioni poniamo $P>Q$, risulterà $sen\,\alpha > sen\,\beta$; quindi $\alpha > \beta$, dovendo esser sempre $\alpha+\beta<180°$.

— 2° Essendo $sen\,\alpha = sen(\pi-\alpha)$, e $sen\beta = sen(\pi-\beta)$, ne segue che prolungando in opposta direzione e di una quantità eguale la risultante di due forze P_1 e P_2 (*fig. 8*) agenti sopra uno stesso punto, avremo tra le tre forze P_1, P_2, P_3 la relazione

$$P_1 : P_2 : P_3 = sen\,\alpha : sen\beta : sen\,\theta.$$

Ma le tre forze P_1, P_2, P_3 sono evidentemente in equilibrio. Dunque: *perchè tre forze agenti sopra uno stesso punto si facciano mutuamente equilibrio, è necessario che le loro direzioni siano comprese in un medesimo piano, che nessuna delle tre cada nell'angolo formato dalle altre due, e che in fine ciascuna di esse sia direttamente proporzionale al seno dell'angolo formato dalle altre due.*

Quindi tre forze P_1, P_2, P_3 date di tali grandezze che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della terza, potranno sempre ordinarsi intorno ad un punto in modo che si facciano mutuamente equilibrio. Sia m, (*fig. 8*) il punto dato: con tre rette rispettivamente eguali alle forze date si costruisca il triangolo mnb, indi si compia il parallelogrammo $mnbt$. Si prolunghi la diagonale bm in mz, finchè sia $mz=mb$: le forze P_1, P_2, P_3, dirette secondo le linee mn, mt, mz, staranno in equilibrio; e le loro mutue inclinazioni saranno date dalla relazione

$$P_1 : P_2 : P_3 = sen\,\alpha : sen\beta : sen(\alpha+\beta).$$

14. Dal teorema espresso in questa ultima relazione deriva la seguente proprietà statica dei poligoni piani. — *Se più*

forze giacenti nel piano di un poligono, agiscano perpendicolarmente su i punti medi dei suoi lati, ai quali siano proporzionali in grandezza, esse staranno in equilibrio.

Cominciamo dal considerare il poligono più semplice, il triangolo, e sia ABC (*fig. 9*). P_1, P_2, P_3 siano le forze proporzionali ad AC, AB, BC, e che agiscono normalmente sui punti medi *s*, *m*, *n*. Da una nota proprietà del triangolo risulta che le tre forze concorreranno in un medesimo punto *g*; e poichè si ha

$$AC : AB : BC = sen B : sen C : sen A,$$

così sostituendo ai lati le forze che vi sono applicate, avremo

$$P_1 : P_2 : P_3 = sen B : sen C : sen A.$$

Ma $sen B = sen (P_2 P_3)$ [1], $sen\,C = sen (P_1 P_3)$ e $sen A = sen (P_1 P_2)$; dunque le tre forze si equilibreranno intorno al punto *g*, poichè ciascuna è proporzionale al seno dell'angolo formato dalle altre due.

Conosciuta questa proprietà nel triangolo, è facile ravvisarla in ogni altro poligono piano. Prendiamo ad esempio il pentagono ABCDE (*fig. 10*). Condotte le diagonali EB ed EC, le due forze P_1 e P_2 sarebbero equilibrate da una sola forza Q_1, che proporzionale ad EB fosse applicata normalmente nel suo punto medio; dunque P_1 e P_2 daranno una risultante eguale a Q_1 e diretta in senso opposto, vale a dire da fuori in dentro del triangolo EBC. Or le forze Q_1 e P_3 che agiscono su questo secondo triangolo si comporranno ancora in una risultante Q_2, proporzionale ad EC, applicata normalmente a questa retta nel suo punto medio, ed agente sul triangolo ECD da fuori in dentro. Ma in forza di queste

[1] Indicando con $(P_2 P_3)$ l'angolo formato dalle due forze P_2 e P_3.

relazioni Q_2 sarà equilibrata da P_4 e P_5; dunque P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 saranno in equilibrio

15. Questa proprietà dei poligoni piani offre pel seguente problema una facile costruzione, che farà vieppiù rilevare l'intima relazione che unisce la Geometria alla Meccanica— Tre forze P, Q, R (*fig. 11*) si equilibrano intorno al punto O: la forza P, l'angolo α ch'essa forma colla forza Q e l'intensità della forza R son tutte quantità date; e si vuol conoscere l'intensità di Q e la direzione di R.

Si costruisca l'angolo ABC eguale al supplemento di α; si tagli $BA=P$, e col punto A come centro e coll' intervallo $AC=R$ si determini il punto C sulla BC: dai punti medî di BA e BC si elevino delle perpendicolari, e dal loro punto d'incontro O si conduca OR perpendicolare ad AC: sarà BC l'intensità di Q, ed OR la direzione di R.

Supponendo $R>P$, od anche $R=P sen\,\alpha$, è chiaro che vi sarà un solo triangolo, e quindi una sola soluzione. Ma se R sia minore di P e maggiore di $P sen\,\alpha$, vi saranno due triangoli, ed in conseguenza due diverse intensità di Q e due diverse direzioni di R, che potranno soddisfare alla condizione di equilibrio. Ed in fine se fosse $R<P sen\,\alpha$, la costruzione del triangolo sarebbe impossibile, e con essa lo sarebbe del pari il definire l'intensità di Q e la direzione di R, che valessero a produrre l'equilibrio di P.

Tutte queste conseguenze della costruzione geometrica sono rifermate dal calcolo. Ed in vero, chiamando y l'angolo POR, sarà l'angolo $ROQ=360°-(\alpha+y)$; quindi per la condizione di equilibrio sarà

$$P : Q : R = sen(\alpha+y) : sen\,y : sen\,\alpha\,;$$

donde

$$Q=\frac{R.sen\,y}{sen\,\alpha} \quad \text{e} \quad sen(\alpha+y)=\frac{P.sen\,\alpha}{R},$$

la quale ultima equazione risoluta rispetto a $sen\,y$ ci dà

$$sen\,y=\frac{sen\,\alpha}{R}\left[P cos\,\alpha \pm \sqrt{P^2 cos^2\alpha + R^2 - P^2}\right]$$

Or se $R > P$, $sen\, y$, e quindi Q, avrà un solo valore, poichè dovendo la risultante di P e Q giacere nell'angolo delle due componenti, il radicale ch' entra nell' espressione di $sen\, y$, dovrà prendersi col solo segno $+$, non potendo y avere un valore della forma $180^\circ + m$. Ed essendo inoltre

$$\sqrt{P^2 cos^2\alpha + R^2 - P^2} = \sqrt{R^2 - P^2 sen^2\alpha},$$

ne segue che avendosi $R = P sen\,\alpha$, il radicale sarà nullo, ed y avrà eziandio un solo valore.

Ma se poniamo $R < P$ e $> P\, sen\,\alpha$, y avrà due valori conformi alla natura del problema; quindi si avranno due valori di Q e due direzioni di R che potranno soddisfare all' equilibrio.

Finalmente l'ipotesi di $R < P sen\,\alpha$ renderebbe immaginario il valore di $sen\, y$, ed il problema sarebbe assurdo.

16. Mercè il principio del parallelogrammo si può determinare la risultante di più forze, che comunque dirette nello spazio, agiscono sopra un punto materiale. Concorrano sul punto O (*fig.* 12) le forze P_1, P_2, P_3, P_4. Dopo aver costruito il parallelogrammo sulle due forze P_1 e P_2 ed ottenuto la loro risultante Os, comporremo questa forza con P_3 ed otterremo Oz, risultante di Os e P_3, ossia di P_1, P_2 e P_3; e finalmente dalla composizione di Oz con P_4 otterremo la risultante OR di P_1, P_2, P_3 e P_4.

Considerando le lunghezze e posizioni delle linee per mezzo delle quali si è determinata la direzione e grandezza della risultante OR, si vede chiaramente che non era necessaria la successiva costruzione dei parallelogrammi, ma che bastava condurre dal punto P_1 la $P_1 s$ eguale e parallela a P_2, dal punto s la sz eguale e parallela a P_3, e finalmente dal punto z la zR eguale e parallela a P_4: la retta OR, che chiude il contorno poligonale, avrebbe espresso la grandezza e direzione della risultaute richiesta.

Quindi: *se il poligono delle forze si chiuda da se me-*

desimo, la risultante sara nulla, e *perciò il punto di applicazione resterà in equilibrio.*

17. Per tradurre in algoritmo questa condizione geometrica dell' equilibrio di più forze agenti sopra un punto, consideriamo un poligono chiuso qualunque *abcde* (*fig.* 13) ed una retta *kh* comunque situata nello spazio; e poniamo che da un punto *a* del contorno poligonale sia abbassata la perpendicolare *as* sulla retta *kh*. Or se immaginiamo che il punto *a*, percorrendo l'intero contorno poligonale *abc...a*, trasporti la *as* in modo da farla rimanere costantemente perpendicolare a *kh*, è chiaro che il piede di questa perpendicolare moverà primieramente da *s* verso *z*, indi ritornando a questo punto passerà successivamente in *t* ed *y*, donde poi toccando *g* ritornerà al primo luogo *s*. Ma i segmenti *sz*, *zt*, *ty*, ec. in tal modo determinati, non sono altra cosa che le proiezioni dei lati del poligono sulla retta *kh*; e prendendo per origine la proiezione *s* del punto di partenza, dovremo riguardare come positive le proiezioni dirette in un senso, e come negative quelle che vanno in senso opposto. E poichè compiuto il giro, il piede della perpendicolare sarà tornato sull' origine *s*, è chiaro che allora la somma delle proiezioni positive avrà pareggiato quella delle negative; laonde se indichiamo con *l* la lunghezza di un lato del poligono, e con α l'angolo di sua inclinazione alla retta *kh*, avremo pel poligono chiuso

$$\Sigma\, l \cos \alpha = 0,$$

vale a dire che sarà nulla la somma dei prodotti di ciascun lato pel coseno dell' angolo di sua inclinazione ad una retta data.

È d'uopo purtuttavia osservare che l'equazione $\Sigma\, l \cos \alpha = 0$ potrebbe esser soddisfatta senza che il poligono fosse chiuso. Prendiamo ad esempio il contorno *abcde* (*fig.* 14): se i punti estremi *a* ed *e* stanno sopra una retta perpendicolare ad *mn*, la proiezione del contorno poligonale su questa ret-

ta soddisferà all' equazione precedente, senza che il poligono sia chiuso, poichè il prodotto di *ae* (quando esistesse) pel coseno della sua inclinazione ad *mn* sarebbe nullo, e lo stesso avverrebbe per ogni altra retta *mn* che giacesse in un piano perpendicolare ad *ae*. Quindi se per due rette giacenti in un piano, o in due piani paralleli, fossero soddisfatte le equazioni

$$\Sigma\, l \cos\alpha = 0,\ \Sigma\, l \cos\beta = 0,$$

(chiamando α e β gli angoli d'inclinazione dei lati del poligono sulle due rette date), non sarebbe questa una condizione sufficiente a farci giudicare che il poligono sia chiuso.

Ma se i lati del poligono, proiettati sui tre spigoli di un' angolo triedro, coi quali facciano rispettivamente gli angoli α, β, γ, ci diano le relazioni

$$\Sigma\, l \cos\alpha = 0,\ \Sigma\, l \cos\beta = 0,\ \Sigma\, l \cos\gamma = 0,$$

queste equazioni non potrebbero esser tutte soddisfatte senza che il poligono fosse chiuso.

Ciò posto, immaginiamo condotti tre assi qualunque pel punto di applicazione di più forze comunque dirette nello spazio, e supponiamo composto il loro poligono. Saranno i suoi lati eguali alle espressioni grafiche delle forze, ed inclinati sugli assi egualmente che lo sono le direzioni delle forze. Chiamando P il valore di una qualunque di esse, ed α, β, γ gli angoli di sua inclinazione agli assi, sarà P ancora la lunghezza del lato che nel poligono è parallelo alla direzione della forza dello stesso nome, e $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ ne saranno le proiezioni sui tre assi. E poichè il poligono dev' esser chiuso perchè le forze siano in equilibrio; quindi sarà equilibrato un sistema di forze agenti sopra un punto materiale, quando siano soddisfatte le tre equazioni di condizione

$$\Sigma\, P \cos\alpha = 0,\ \Sigma\, P \cos\beta = 0,\ \Sigma\, P \cos\gamma = 0. \quad (a)$$

Se le forze agissero tutte in un piano, il loro poligono giacerebbe nello stesso piano, e le tre equazioni (a) si ridurrebbero a due sole.

18. Poichè l'esistenza delle tre equazioni non dipende dalla speciale inclinazione degli assi, ma soltanto dall' esser chiuso il poligono delle forze; ne segue che se più forze agenti sopra un punto soddisfano per un certo sistema di assi alle equazioni (a), queste resteranno soddisfatte per ogni altro sistema.

Ma se tutte o talune delle equazioni (a) non siano soddisfatte, è chiaro che allora il poligono delle forze non sarà chiuso; esse dunque si comporranno in una risultante, che vedremo potersi determinare in grandezza e direzione per mezzo delle stesse equazioni (a), dopo che avremo fatto talune altre osservazioni sul poligono delle forze.

19. Supponiamo che sopra un punto materiale A (*fig. 15*) agiscano le tre forze P_1, P_2, P_3 non esistenti in un medesimo piano. Condotta pel punto s la sd eguale e parallela alla forza P_1, e pel punto d la dc eguale e parallela alla forza P_2, la congiungente Ac esprimerà la risultante delle tre forze date. Or compiuti i due parallelogrammi $bsdc$, $Azgt$, e quindi condotte le dz, cg e bt, è chiaro che risulterà un parallelepipedo definito dalle tre rette Az, At ed As che disegnano le grandezze e direzioni delle forze date, e la risulte Ac ne sarà diagonale.

Dunque: *la risultante di tre forze che in piani differenti agiscono sopra un punto materiale, è rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre rette che disegnano le intensità e direzioni delle tre forze date.*

Viceversa potremo riguardare ogni forza come risultante di tre altre dirette secondo le comuni intersezioni di tre piani condotti pel suo punto di applicazione. Sia AP (*fig. 16*) la forza data, e siano Ax Ay, Az i tre assi che dovranno disegnare le direzioni delle componenti, di cui AP dovrà es-

sere risultante. Per l'estremo P della retta AP si conducano tre piani, l'uno parallelo al piano yAx che taglierà la Az nel punto m, l'altro parallelo a zAx e che incontrerà Ay nel punto n, ed il terzo parallelo a zAy e che determinerà su Ax il punto s. È chiaro che mediante questa costruzione AP diverrà diagonale di un parallelepipedo, definito dai tre spigoli Am, An, As: in conseguenza tre forze che fossero rappresentate in grandezza e direzione da queste tre rette, darebbero la risultante AP.

Laonde essendo dati gli angoli delle mutue inclinazioni di tre assi, e quelli che vi forma una forza applicata all'origine, saranno ancora dati i valori delle sue componenti secondo i medesimi assi. A fine di maggior semplicità supporremo che gli assi siano rettangolari, e chiamando α, β, γ gli angoli che una forza P forma con quelli delle x, y, z, avremo $As = P \cos\alpha$, $An = P \cos\beta$, $Am = P \cos\gamma$. Quindi i prodotti $P \cos\alpha$, $P \cos\beta$, $P \cos\gamma$, di cui le equazioni (a) contengono le somme, disegneranno nel sistema rettangolare le componenti di ciascuna forza prese nel senso degli assi; e perciò nel caso che le dette equazioni siano soddisfatte, esse esprimeranno che per aversi equilibrio è necessario che le componenti secondo ciascun asse si distruggano a vicenda. E poichè le equazioni (a) quando siano soddisfatte per un certo sistema di assi, dovranno esserlo necessariamente per ogni altro; così è chiaro che se le somme delle componenti secondo un medesimo asse sono nulle in una certa giacitura degli assi rettangolari, esse lo saranno egualmente in ogni altra.

Non essendo soddisfatta alcuna delle equazioni (a), ciò vorrà dire che l'intero sistema di forze sarà riducibile a tre sole che agiranno secondo gli assi e nel senso definito dal segno che precederà le loro espressioni [1]. Le quali tre forze

[1] Poichè le forze sono espresse per mezzo di linee rette, le loro direzioni saranno indicate, egualmente che nella Geometria anali-

poi si comporranno in una risultante, espressa in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelepipedo rettangolare, di cui $\Sigma P \cos\alpha$, $\Sigma P \cos\beta$ e $\Sigma P \cos\gamma$ saranno i tre spigoli

tica, dai segni + e —, secondochè saranno coincidenti ovvero opposte. E se nella Geometria l'apposizione dei segni alle linee in fondo non è che mera convenzione, nell'espressione delle forze poi essa è una deduzione necessaria dell' equazione fondamentale (n.° 11).

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots).$$

Or se una forza faccia coll'asse delle x positive, per esempio, un angolo α compreso tra 0° e 90°, la sua componente secondo lo stesso asse andrà diretta nel senso delle ascisse positive, mentre sarà positivo ancora il valore di $\cos\alpha$. Ma se α fosse compreso tra 90° e 270°, allora avremmo contemporaneamente $\cos\alpha$ negativo ed una componente diretta nel senso delle ascisse negative. Laonde nelle espressioni $P \cos\alpha$, $P \cos\beta$, ec. essendo la direzione della forza sempre identica a quella della linea trigonometrica alla quale è congiunta, i segni saranno da queste linee determinati, ed i valori di P dovranno considerarsi assolutamente.

Vi ha purtuttavia un caso (quello delle forze parallele) in cui il valore della risultante è indipendente dagli angoli che le componenti potessero fare cogli assi coordinati. I valori delle linee trigonometriche saranno allora arbitrarî, ed il senso di una forza, quanto sia d'uopo definirlo, non potrà esserlo altrimenti che da segno applicato immediatamente al suo valore assoluto. Avendosi, per esempio, due sistemi opposti di forze parallele, questa relazione di sito non potrà essere espressa in altro modo, che apponendo il segno + alle componenti di un sistema ed il segno — a quelle dell' altro.

Del resto la Meccanica togliendo dalla Geometria i segni indicatori delle direzioni, può formolarne il principio in un modo conforme alla natura delle forze. Così dicendo che — *una forza, parallela ad un dato asse, sarà positiva o negativa, secondochè la sua azione tenderà ad aumentare o diminuire la coordinata corrispondente del suo punto di applicazione* — si avrà lo stesso risultamento di quello ottenuto mercè la considerazione dei fattori trigonometrici, ma che intanto deriva da un concetto il quale non identifica l'idea di forza con quella di una semplice linea.

concorrenti all' origine. Or chiamando per maggior brevità X, Y, Z questi tre spigoli avremo per la natura del parallelepipedo rettangolare la diagonale

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ ;$$

e chiamando *a*, *b*, *c* gli angoli ch' essa forma coi tre assi, saranno

$$cos.a=\frac{X}{R},\ cos.b=\frac{Y}{R},\ cos.c=\frac{R}{Z}.$$

Ma X, Y, Z sono funzioni conosciute delle intensità e direzioni delle forze ; perciò essendo queste quantità date in numeri , le quattro ultime equazioni ci daranno le espressioni numeriche della grandezza e direzione della risultante.

Se poi una sola delle equazioni (*a*) fosse soddisfatta , è chiaro che l' intero sistema delle forze si ridurrebbe a due sole che avrebbero a risultante la diagonale di un rettangolo. Poniamo che abbia luogo la sola equazione $\Sigma P cos\gamma=0$, le forze date si ridurranno alle due, X ed Y, e si avranno

$$R=\sqrt{X^2+Y^2},\ cos.a=\frac{X}{R},\ cos.b=\frac{Y}{R}.$$

E se infine fossero soddisfatte due delle equazioni (*a*), tutte le forze agenti sul punto comune di applicazione si ridurrebbero ad una sola, nota di grandezza e direzione.

20. Essendo nel caso di equilibrio X=0, Y=0, Z=0, ed in conseguenza R = 0 , i coseni degli angoli formati dalla risultante cogli assi si presenteranno allora sotto la forma d' indeterminazione $\frac{0}{0}$. Or questo simbolo racchiude l' enunciato di una legge statica degna di nota. Ed in vero , se noi immaginiamo tolta via una delle forze dal sistema che abbiamo supposto equilibrato, è evidente che l'equilibrio non potrà più reggere , perchè le rimanenti forze si comporranno in una risultante , la quale rimaneva distrutta dall' azione

della forza soppressa. Ed immaginando che or l' una, or l' altra delle forze agenti fosse tolta di mezzo, si renderà manifesto che in un sistema di forze a vicenda equilibrate ciascuna di esse deve trovarsi eguale ed opposta alla risultante di tutte le altre. Potremo dunque in tal caso immaginare tante diverse direzioni di risultanti, quante sono le forze che si fanno mutuamente equilibrio: ma la natura della funzione indicata dal segno Σ e che definisce i valori di X, Y, Z, è indipendente dal numero delle forze agenti; perciò le espressioni trigonometriche delle inclinazioni della risultante non in altro modo potrebbero ammettere moltiplicità di valori, se non assumendo la forma d' indeterminazione $\frac{0}{0}$.

21. Elevando a quadrato le tre equazioni

$$X = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots$$
$$Y = P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 + \ldots$$
$$Z = P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 + \ldots,$$

ed osservando che

$$\cos^2\alpha_n + \cos^2\beta_n + \cos^2\gamma_n = 1,$$

e che

$$\cos\alpha_n \cos\alpha_{n-1} + \cos\beta_n \cos\beta_{n-1} + \cos\gamma_n \cos\gamma_{n-1}$$

esprime il coseno dell' angolo formato dalle due rette che rappresentano le forze P_n e P_{n-1}, avremo

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP\cos(PP)$$

ossia

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP\cos(PP);$$

valore della risultante di più forze, espressa in funzione dei valori delle componenti e delle loro mutue inclinazioni.

22. Se il punto di comune applicazione delle forze dovesse rimanere costantemente sopra una data superficie, sarebbe sufficiente per l'equilibrio del punto che la risultante di tutte

le forze non altrimenti agisse che premendolo contro la superficie data. Or la pressione va necessariamente diretta secondo la normale alla superficie che la riceve. Ed in vero poniamo che fosse obbliqua, come la *mn* (*fig.17*); la si potrebbe allora decomporre in due, l'una diretta secondo la normale *sn*, l'altra secondo l'intersezione *on* del piano normale condotto per *mn* col piano tangente alla superficie nel punto *n*. Or la componente *on* non incontrando nella superficie resistenza veruna [1], l'equilibrio del punto non potrà aver luogo, finchè *on* non sia nulla, vale a dire finchè *mn* non si confonda colla normale *sn*.

Ciò posto, sia in generale $F(x,y,z)=0$ l'equazione della superficie data, e siano a, b, c gli angoli che la normale condotta pel punto (x, y, z) fa cogli assi coordinati. Differenziando l'equazione della superficie avremo

$$l.dx+m.dy+n.dz=0,$$

in cui

$$l=\frac{dF}{dx},\ m=\frac{dF}{dy},\ n=\frac{dF}{dz}.$$

Facciamo inoltre $D=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$, ed avremo

$$\cos a=\frac{l}{D},\ \cos b=\frac{m}{D},\ \cos c=\frac{n}{D}.\ [2]$$

Quindi se la risultante delle forze coincide colla normale al

[1] Nell'ipotesi che l'attrito sia nullo.

[2] Prendiamo sulla normale *ns* (*fig.* 17) il punto *s* le di cui coordinate siano x', y', z' ed x, y, z siano quelle del punto *n* giacente sulla superficie. La loro distanza $sn=D$ sarà data dall'equazione

$$D^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2;$$

la quale differenziata ci darà

$$DdD=(x-x')dx+(y-y')dy+(z-z')dz.$$

punto di applicazione, le sue componenti secondo gli assi saranno

$$X = R\frac{l}{D}, \quad Y = R\frac{m}{D}, \quad Z = R\frac{n}{D},$$

da cui eliminando R, si avranno per l'equilibrio del punto le due equazioni di condizione

E poichè $x - x' = D \cos a$, $y - y' = D \cos b$, $z - z' = D \cos c$; sostituendo avremo

$$dD = \cos a.dx + \cos b.dy + \cos c.dz.$$

Or il punto (x, y, z) essendo comune al piano tangente la superficie, la distanza D sarà un *minimo* perchè presa sulla perpendicolare al detto piano, avremo dunque

$$\cos a.dx + \cos b.dy + \cos c.dz = 0.$$

Or eliminando dx tra questa equazione e la derivata di quella della superficie, ossia

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

avremo

$$\left(\frac{dF}{dx}\cos b - \frac{dF}{dy}\cos a\right)dy + \left(\frac{dF}{dx}\cos c - \frac{dF}{dz}\cos a\right)dz = 0;$$

la quale equazione, perchè sia sempre soddisfatta, dovrà risolversi nelle due

$$\frac{dF}{dx}\cos b - \frac{dF}{dy}\cos a = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dF}{dx}\cos c - \frac{dF}{dz}\cos a = 0,$$

e combinando queste due equazioni colla terza

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

si avranno i valori di $\cos a$, $\cos b$ e $\cos c$, quali si trovano nel testo.

$$X\frac{dF}{dy}-Y\frac{dF}{dx}=0\,,\;X\frac{dF}{dz}-Z\frac{dF}{dx}=0,$$

ossia

$$X:Y:Z=\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}:\frac{dF}{dz};$$

vale a dire che le somme delle componenti delle forze secondo gli assi debbono essere direttamente proporzionali alle omologhe derivate parziali dell' equazione esprimente la superficie data.

Se l'ultima proporzione non fosse soddisfatta, e che si cercasse il punto (x,y,z) della superficie, nel quale trasportando le forze date parallelamente a se stesse si avesse la coincidenza della normale colla risultante; allora le due equazioni di condizione contenute nell' ultima proporzione, congiunte all' equazione della superficie farebbero conoscere le coordinate x, y, z del punto richiesto.

Poniamo ancora che il punto di applicazione delle forze debba rimanere sopra una data curva, vale a dire sulla comune intersezione di due superficie date; è chiaro che in tal caso l' equilibrio del punto richiederà necessariamente che tutte le forze date siano equivalenti a due altre N e N' dirette secondo le normali alle due superficie curve, condotte pel punto di applicazione delle forze. Siano

$$F(x,y,z)=0 \;\text{ e }\; f(x,y,z)=0$$

le equazioni delle due superficie, di cui la curva data è comune intersezione. Chiamando a, b, c gli angoli che la normale alla prima superficie forma cogli assi delle x, y, z, ed a', b', c' gli angoli corrispondenti rispetto alla seconda avremo

$$\cos a=\frac{l}{D}\,,\;\cos b=\frac{m}{D}\,,\;\cos c=\frac{n}{D}\,,$$

$$\cos a'=\frac{l'}{D'}\,,\;\cos b'=\frac{m'}{D'}\,,\;\cos c'=\frac{n'}{D'}\,,$$

quindi le componenti secondo gli assi X, Y, Z della risultante delle due forze N ed N' saranno

$$X=N\frac{l}{D}+N'\frac{l'}{D'},\ Y=N\frac{m}{D}+N'\frac{m'}{D'},\ Z=N\frac{n}{D}+N'\frac{n'}{D'}.$$

Dalle quali eliminando N ed N', si avrà l'equazione di condizione per l'equilibrio del punto

$$\left(\frac{dF}{dz}\cdot\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{df}{dz}\right)X+\left(\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dz}-\frac{dF}{dz}\cdot\frac{df}{dx}\right)Y+\left(\frac{dF}{dy}\cdot\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dy}\right)Z=0$$

A queste condizioni di grandezza ed inclinazione, a cui debbono soddisfare le forze per tenere in equilibrio un punto materiale sopra una superficie o linea data, fa d'uopo aggiungere un'altra, la quale non può essere espressa da equazione, e che consiste nella necessità di avere una risultante che spinga il punto contro la superficie o linea data. Così un punto che giace sul lato concavo, vuol esser premuto in direzione opposta a quella che si richiederebbe se giacesse sul lato convesso.

23. Abbiamo di sopra osservato come la risultante di un sistema di forze agenti sopra un punto materiale debba confondersi colla diagonale del parallelepipedo costruito su tre rette concorrenti al punto dato, e che rappresentano le componenti delle forze secondo le stesse rette. In tal caso la risultante non potrà esser nulla, e quindi il punto in equilibrio, senza che siano nulli i tre spigoli determinanti il parallelepipedo, vale a dire, senza che siano soddisfatte tre equazioni di condizione. Ma se il punto non sia perfettamente libero nello spazio, ma obbligato a dover rimanere costantemente sopra una data superficie; allora non vi sarà possibilità di moto che nel piano tangente alla superficie. Quindi se cerchiamo le componenti delle forze secondo duo assi giacenti in questo piano, basterà che la loro risultante sia nulla, perchè il punto resti in equilibrio. Or una tale risultante essendo diagonale di un parallelogrammo, non potrà

esser nulla senza che lo siano i lati adiacenti: laonde l'equilibrio del punto richiederà che siano soddisfatte due equazioni di condizione, come in realtà abbiamo trovato. Finalmente, per l'equilibrio di un punto sopra una curva non abbiamo trovato necessaria che una sola equazione di condizione, attesocchè il moto non era possibile che nella sola direzione della tangente.

Or queste considerazioni statiche si trovano precisamente tradotte in algoritmo nelle equazioni di condizione dalle quali dipende l' equilibrio del punto sulla superficie o sulla linea. Ed in vero supponiamo che nel caso di una superficie l' asse delle z sia diretto secondo la normale, e quelli delle x e delle y siano situati nel piano tangente. Avremo così

$$\frac{l}{D}=0, \quad \frac{m}{D}=0, \quad \frac{n}{D}=1$$

quindi le tre equazioni (*pag.* 33)

$$X=R\frac{l}{D}, \quad Y=R\frac{m}{D}, \quad Z=R\frac{n}{D}$$

diverranno

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=R;$$

vale a dire che le componenti delle forze secondo gli assi situati nel piano tangente, debbono dare due risultanti nulle, perchè il punto sia in equilibrio.

Similmente, se pel caso di una curva prendiamo l' asse delle z secondo la tangente, e gli altri due assi nel piano condotto per le due normali alle superficie, di cui la curva è comune intersezione, avremo

$$\frac{dF}{dz}=0, \frac{df}{dz}=0, \text{ quindi } Z=0;$$

ed allora l' equazione di condizione, che abbiamo trovato per l'equilibrio di un punto, sarà soddisfatta qualunque siano i valori di X ed Y. Vale a dire che essa non altro esprime che l' impossibilità del moto secondo la tangente alla curva

CAPO TERZO.

Composizione delle forze parallele.

Risultante di due forze parallele dirette nel medesimo senso: centro di esse — Risultante di due forze parallele dirette in senso opposto: caso della *coppia* — Composizione di un sistema di forze parallele: coordinate del loro centro — Interpetrazione del caso in cui le coordinate del centro si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, ovvero $\frac{m}{0}$ — Decomposizione di una forza in altre ad essa parallele — Momento di una forza — Momento della risultante in funzione dei momenti delle componenti — Momento di una coppia — Espressione geometrica della direzione e quantità del momento di una coppia — Teoremi da cui derivano le leggi della composizione e decomposizione delle coppie — Identità delle leggi di composizione delle coppie con quelle che reggono la composizione di più forze agenti sopra uno stesso punto.

24. Siano P e Q (*fig. 18*) due forze parallele dirette nel medesimo senso, ed agenti sui punti *a* e *b* invariabilmente congiunti. L'azione delle due forze rimarrà inalterata, se ad esse aggiungiamo le due forze eguali ed opposte *am* e *bn*, poichè queste a vicenda si distruggono. Quindi all'azione di P e Q sarà equivalente quella di *ac* risultante di P ad *am*, e di *bd* risultante di Q e *bn*. Ma se P e Q son parallele, *ac* e *bd* a sufficienza prolungate si dovranno incontrare in un punto *k*; e poichè ogni punto preso sulla direzione di una forza può evidentemente esser riguardato come punto di applizione, così potremo considerare le forze *ac* e *bd* come applicate al loro punto d'incontro *k* (che supponiamo invariabilmente unito ai punti *a* e *b*) e rappresentate dalle rette *kq=ac*, e *kr=bd*. Or decomponendo queste due forze secondo *ko* parallela a P e Q, ed *hl* parallela ad *ab*, avremo le quattro forze *kh*, *kl*, *kt*, *ks*: le due prime come eguali ed opposte si equilibrano; le altre due, perchè agenti nella stessa direzione, daranno una risultante e-

guale alla loro somma. Ma $kt=P$, $kc=Q$, dunque due forze parallele, dirette nel medesimo senso, si compongono in una risultante ad esse parallela ed eguale alla loro somma; vale a dire che si ha $R=P+Q$.

E perchè R sia interamente definita, fa d'uopo ancora conoscere un punto qualunque della sua direzione, e sia per esempio quello in cui R taglia la retta ab che unisce i punti di applicazione delle due componenti. Or abbiamo i triangoli simili gkt ed ako, skv e bko, i quali ci danno le seguenti proporzioni,

$$gt : P=ao : ok$$
$$sv : Q=bo : ok,$$

donde risultano

$$gt.ok=P.ao\ ,\quad sv.ok=Q.bo\ ,$$

e poichè $gt=sv$, sarà

$$P.ao=Q.bo\ ,$$

ossia

$$P : Q=bo : ao.$$

Dunque: *la risultante di due forze parallele dirette nel medesimo senso, è eguale alla loro somma, parallela alla loro direzione, e divide la retta che unisce i loro punti di applicazione in parti reciprocamente proporzionali alle loro intensità.*

Se immaginiamo che le forze P e Q, conservandosi parallele ed inalterate di grandezza, girino intorno ai loro punti di applicazione a e b, la risultante passerà sempre pel punto o, la cui posizione abbiamo trovato indipendente dalla speciale direzione delle due forze. Questo punto, che per la sua invariabilità dobbiamo riguardare come vero punto di applicazione della risultante, si nomina *centro delle forze parallele.*

Dall' ultima proporzione si deduce ancora che

$$P+Q : P : Q = bo+ao : bo : ao,$$

ossia

$$R : P : Q = ab : bo : ao;$$

vale a dire che ciascuna delle tre forze (le due componenti P e Q, e la loro risultante R) è direttamente proporzionale alla distanza che separa i punti di applicazione delle altre due. Or la risultante sostituendo le due componenti, queste tre forze non si possono immaginare coesistenti, se non introducendo nel sistema una forza eguale ed opposta alla risultante, e che produrrà necessariamente equilibrio.

Quindi: *se tre forze parallele si equilibrano, esse giaceranno necessariamente in un medesimo piano; e conducendo una trasversale alle loro direzioni, ciascuna delle tre forze sarà direttamente proporzionale al segmento determinato dalle altre due.*

25. Passiamo ora a considerare due forze parallele opposte, e poniamo ch' esse siano diseguali. Siano P e Q (*fig. 19*) le due forze: dopo aver introdotto le due forze eguali e contrarie *ac* e *bc*, si compiano i parallelogrammi Q*c* e P*c*, le cui risultanti *ag* e *bl* si potranno sostituire alle forze P e Q. Ma per la teorica delle rette parallele è chiaro che *ag* e *bl* a sufficienza prolungate si dovranno incontrare in un punto *t*, che riguarderemo come punto di applicazione delle forze $ts = ag$ e $tn = bl$. Indi decomporremo la *ts* e la *tn* secondo le due direzioni, *ho* parallela alle forze date e *km* parallela alla congiungente *ab*. Avremo così le componenti *tk*, *tm*, *th*, *te*, dalle quali eliminate le due prime, perchè a vicenda si equilibrano, resteranno le due *th* e *te* che diseguali ed opposte daranno una risultante eguale alla loro differenza: avremo dunque $R = P - Q$.

Perciò: *la risultante di due forze parallele opposte, è eguale alla loro differenza e parallela alle loro direzioni.* — Dunque, siano cospiranti ovvero opposte due forze parallele, potremo dire in generale ch' esse si compongono in una sola forza eguale alla loro somma algebrica.

Per determinare poi il punto o, in cui la direzione di R taglia il prolungamento di ob, osserviamo che se questo punto fosse noto, allora applicandovi nella direzione oz, opposta alla direzione oh della risultante, una forza a questa eguale, avremmo pel principio esposto nel n° precedente (facendo $bo=x$ ed $ab=a$)

$$a : x = \mathrm{R} : \mathrm{Q},$$

donde

$$x = \frac{\mathrm{Q}.a}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Q}.a}{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}.$$

In conseguenza la risultante di due forze parallele, dirette in senso opposto, decresce e si allontana dalle forze componenti, a misura che queste si approssimano all'eguaglianza. Perciò se P—Q è una quantità piccolissima, sarà viceversa grandissima la distanza x; e quando P—Q sarà pervenuta al limite zero, x avrà toccato il limite ∞. Questa inesistenza di risultante, congiunta all' impossibilità di equilibrio, dimostra che una *coppia* di forze parallele eguali ed opposte non può essere equilibrata da una forza sola.

26. Mercè gli esposti principî egli è facile determinare graficamente la risultante di qualsivoglia numero di forze parallele. Siano $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ *(fig. 20.)* le forze date, $a\ b\ c\ d$ i loro punti di applicazione, che supponiamo uniti in un sistema invariabile. Dividendo la retta ab in parti reciprocamente proporzionali alle intensità delle forze P_1 e P_2, avremo il punto e di applicazione della loro risultante $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$; componendo similmente P_3 con $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$ troveremo il punto s di applicazione della forza $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3$; e continuando sempre la stessa costruzione, perverremo in fine a determinare la risultante ed il *centro* dell' intero sistema.

E se le forze date non siano tutte dirette nel medesimo senso, allora si comincerà dal determinare la risultante di ciascuno dei due sistemi, in cui potranno ordinarsi tutte le forze date. Se queste due risultanti parziali riusciranno egua-

li, si avrà una coppia, e le forze saranno irreducibili a risultante unica; nel caso contrario avremo da costruire la risultante di due forze parallele, diseguali ed opposte.

Ciò che abbiamo osservato pel caso di due forze parallele, ha luogo ancora qualunque ne sia il numero; ossia che la determinazione del loro centro non dipende che dalle posizioni dei punti di applicazione e dalle intensità delle forze. Ed affinchè questa dipendenza sia esplicitamente definita da un' espressione algoritmica, riferiamo le posizioni dei punti di applicazione a tre piani coordinati zAx, zAy, xAy (*fig. 21*). Incominciando dal caso più semplice, consideriamo due sole forze parallele P_1 e P_2 applicate ai punti a e b definiti dalle coordinate $x_1\, y_1\, z_1$ pel primo, ed $x_2\, y_2\, z_2$ pel secondo: e sia c il centro delle due forze. Dai punti a, c, b conducendo delle parallele all' asse Az, e dai punti d, e, g, in cui incontreranno il piano yAx tirando ds, en, gt parallele ad Ay, saranno ad, ds, As le coordinate del punto a; ce, en, An quelle del punto c; e bg, gt, At quelle di b. Or per un noto teorema di Geometria abbiamo

$$bc : ac = ge : ed = tn : ns;$$

ma $tn = At - An = x_2 - An$, ed $ns = An - As = An - x_1$; quindi dovendo la risultante dividere la retta, che unisce i punti di applicazione delle due forze P_1 e P_2, in parti reciprocamente proporzionali alle loro intensità, avremo

$$P_1 : P_2 = bc : ac = x_2 - An : An - x_1,$$

donde

$$An = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}.$$

Similmente operando rispetto agli altri due piani cordinati, otterremo

$$en = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2},$$

$$ce = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}.$$

Estendendo, ciò ch' è facile, questo calcolo ad un numero qualunque di forze parallele, P_1 P_2 P_3 ec., si avranno le coordinate X, Y, Z del loro centro espresse dalle equazioni.

$$X = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + ..}{P_1 + P_2 + P_3 + ..} = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}$$

$$Y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + ..}{P_1 + P_2 + P_3 + ..} = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}$$

$$Z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + ..}{P_1 + P_2 + P_3 + ..} = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

27. Finchè tutte le forze parallele componenti un sistema saranno dirette nello stesso senso, il polinomio ΣP, che forma il denominatore comune di queste tre funzioni frazionarie, sarà sempre un numero positivo; ma i numeratori potranno essere positivi, negativi o nulli, secondo i valori assoluti e relativi delle coordinate dei punti di applicazione; ed i risultamenti che le formole daranno in queste diverse ipotesi, saranno facilmente interpetrati. Ma se poniamo il sistema delle forze composto di talune dirette in un senso e di altre che vanno in senso opposto, allora dinotando con P le prime e con P′ le seconde, il denominatore comune alle tre funzioni frazionarie prenderà la forma $\Sigma P - \Sigma P'$; e le coordinate del centro saranno espresse da

$$X = \frac{\Sigma P x - \Sigma P' x'}{\Sigma P - \Sigma P'},\ Y = \frac{\Sigma P y - \Sigma P' y'}{\Sigma P - \Sigma P'},\ Z = \frac{\Sigma P z - \Sigma P' z'}{\Sigma P - \Sigma P'}.$$

Or supponendo $\Sigma P = \Sigma P'$, $\Sigma P x = \Sigma P' x'$, $\Sigma P y = \Sigma P' y'$, $\Sigma P z = \Sigma P' z'$, avremo

$$X = \frac{o}{o},\ Y = \frac{o}{o},\ Z = \frac{o}{o};$$

quindi sarà

$$\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}=\frac{\Sigma P'x'}{\Sigma P'}, \quad \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}=\frac{\Sigma P'y'}{\Sigma P'}, \quad \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}=\frac{\Sigma P'z'}{\Sigma P'}.$$

Ma i primi membri di queste equazioni rappresentano le coordinate del centro delle P, ed i secondi membri le analoghe coordinate del centro delle P'; dunque i due centri si confonderanno in un solo. Perciò le due risultanti parziali si troveranno agenti sopra una stessa linea ed in opposte direzioni, ed in conseguenza come eguali si dovranno a vicenda equilibrare. Quindi si rende chiara la ragione della forma indeterminata che assumono i valori delle coordinate del centro; poichè ogni punto della retta indefinita sulla quale due forze eguali si equilibrano, può essere riguardato come punto di loro applicazione.

Se poi uno o più dei numeratori delle funzioni frazionarie, che determinano le coordinate del centro, fosse diverso da zero, una o più di queste coordinate prenderebbe la forma dell' infinito $\frac{m}{o}$; la quale indicherebbe che l' intero sistema delle forze è riducibile ad una coppia. Se la sola X del centro conservasse la forma $\frac{o}{o}$, ciò vorrebbe dire che i punti di applicazione della coppia giacciono sopra una retta parallela al piano yAz; e se anche la Y del centro si presentasse sotto la forma di $\frac{o}{o}$, i punti di applicazione della coppia giacerebbero sopra una retta parallela all' asse delle z.

28. Le formole

$$R=\Sigma P, \quad R.X=\Sigma Px, \quad R.Y=\Sigma Py; \quad R.Z=\Sigma Pz$$

servono ancora a risolvere il problema inverso, vale a dire a decomporre una forza in altre ad essa parallele. Poniamo in primo luogo che i punti di applicazione delle componenti debbano giacere sopra una retta condotta pel punto di ap-

plicazione della forza data. Allora prendendo questa retta per asse delle x, le quattro equazioni qui sopra notate si ridurranno alle due

$$R=\Sigma P\,,\ R.X=\Sigma Px.$$

Mercè le quali possiamo risolvere i due seguenti problemi — 1° Dati i punti di applicazione delle componenti, determinarne le intensità — 2° Dato uno dei punti di applicazione e l'intensità di una componente, determinare l'altra componente e l'altro punto di applicazione — Ma se fossero date le due componenti, e si cercassero i loro punti di applicazione, il problema sarebbe indeterminato, poichè la sola 2ª equazione sarebbe destinata a risolverlo. Ed in vero, posto il principio che la risultante debba dividere la retta che unisce i punti di applicazione delle componenti in parti reciprocamente proporzionali alle loro intensità, è chiaro che questa ragione può aver luogo tra due rette piccolissime o grandissime; quindi il problema, che consideriamo deve riuscire necessariamente indeterminato, poichè la posizione di una dei punti richiesti di applicazione rimarrà sempre arbitraria sulla retta data, e quella dell'altro punto ne verrà determinata in conseguenza.

Se poi i punti di applicazione della forza data e delle sue componenti fossero sottoposti alla condizione di dover giacere in un medesimo piano, allora per risolvere il problema avremmo le tre equazioni

$$R=\Sigma P\,,\ R.X=\Sigma Px\,,\ R.Y=\Sigma Py.$$

Quindi si potranno determinare tre incognite, formolando il problema in uno dei seguenti modi — 1° Dati i tre punti di applicazione delle componenti, determinarne le intensità. — 2° Date due componenti e due punti di applicazione, determinare le altre tre cose, vale a dire la 3ª componente, e le due coordinate del 3° punto. E poichè ogni punto ignoto introduce due incognite nelle equazioni, così il problema do-

vrà riuscire indeterminato, appena vi saranno due punti di applicazione da conoscere.

In fine i punti di applicazione delle componenti potranno giacere ovunque nello spazio, ed allora le quattro equazioni segnate al principio di questo numero, ci faranno determinare quattro incognite, vale a dire — 1° Dati i quattro punti di applicazione delle componenti, determinarne la intensità — 2° Dati tre dei punti di applicazione e tre componenti, determinare le tre coordinate del quarto punto e la quarta componente — Le altre combinazioni dei punti di applicazione colle componenti menerebbero in generale a problemi indeterminati.

Dalle quali considerazioni si rileva chiaramente che riuscirà sempre indeterminato il problema, quando si cercherà decomporre una forza in più di quattro ad essa parallele.

29. Sia ab (*fig.* 22) una retta inflessibile, mobile intorno al punto c; ed agli estremi di essa siano perpendicolarmente applicate due forze parallele P e Q, tali da soddisfare la proporzione

$$P : Q = bc : ac.$$

È chiaro che la loro risultante passerà pel punto c, e perciò la retta ab non prenderà moto di rotazione intorno a questo punto. Osserviamo ancora che le tendenze a rotare intorno al punto fisso c sono tali, che prevalendo l'azione della forza P la retta roterebbe da destra a sinistra, e viceversa da sinistra a destra, se prevalesse l'azione di Q. Or conservando inalterata l'intensità di quest'ultima forza, supponiamola trasportata parallelamente a se stessa nel punto b' medio di bc. È evidente che la risultante non passerà più pel punto fisso c, ma per un punto situato tra a e c; e la retta prendendo allora un moto di rotazione da destra a sinistra, ci farà chiaro che l'azione di Q non avrà potuto equilibrare quella di P. Dunque l'azione di una forza in far girare una retta intorno ad un punto fisso, dovrà esser fun-

zione dell' intensità della forza e della distanza che separa il punto fisso dalla sua direzione.

Per determinare la natura di questa funzione, cerchiamo il valore che dovrebbe avere Q, affinchè applicata in b' equilibrasse l' azione di P. Facendo $bc=q$, $ac=p$, il valore richiesto di Q ci sarà dato dalla proporzione

$$P : x = \tfrac{1}{2}q : p,$$

donde

$$x = \frac{2Pp}{q}.$$

Ma quando la forza Q era applicata in b, il suo valore era $\frac{Pp}{q}$, metà di quello di x; dunque per trasportare il punto di applicazione b alla metà di bc, e conservare nel tempo stesso l' equilibrio, è stato necessario duplicare l' intensità di Q. In conseguenza una forza d' intensità costante avrà un potere di rotazione doppio, triplo, ec. secondochè la sua distanza dall' asse sarà doppia, tripla ec; e perciò la quantità di questo potere dovrà essere espressa dal prodotto dell' intensità della forza per la sua distanza dall' asse. Questo prodotto si nomina *momento della forza*.

E se la forza P (*fig. 23*), che tende a far girare la retta ab intorno ad un asse proiettato in c, avesse una direzione obbliqua alla stessa retta, allora scomporremmo la forza in due, l' una bp perpendicolare a bc, l' altra bs nel senso del suo prolungamento: quest' ultima sarebbe evidentemente distrutta dal punto fisso c, rimanendo la sola bp a far rotare la retta. Essendo $bp = P\cos\alpha$, il suo momento sarà $P\cos\alpha.bc$; ma conducendo cm perpendicolare alla direzione della forza P, avremo $sen\,\alpha' = \cos\alpha$, e $P\cos\alpha.bc = P.sen\,\alpha'.bc = P.cm$. Perciò qualunque sia l' inclinazione della forza P sulla retta bc, il suo momento sarà sempre espresso dal prodotto dell' intensità della forza per la sua distanza dal punto c.

Una retta mobile intorno ad un punto è un' ipotesi puramente matematica: nella realtà non abbiamo che un corpo il quale rota intorno ad un asse. Laonde, perchè la forza impieghi tutta la sua energia nella produzione dell' effetto rotatorio, fa d' uopo che la sua direzione sia contenuta in un piano perpendicolare all' asse; poichè se giacesse in un piano obbliquo all' asse, la potremmo riguardare come risultante di due forze, l' una in un piano all' asse perpendicolare e che sola tenderebbe a produrre la rotazione, l' altra agente nel senso dell' asse e che tenderebbe trasportarlo nella direzione del suo prolungamento.

30. Quando più forze tendono a far girare un corpo intorno ad un asse, il momento della risultante pareggerà la somma o la differenza dei momenti delle componenti, secondochè queste tenderanno produrre rotazioni cospiranti ovvero opposte. Cominciando dal caso in cui le forze cospirino tutte a far rotare il corpo in un medesimo senso; potremo supporre, senz' alterare la generalità della quistione, ch' esse agiscano in un medesimo piano ed in direzioni parallele, stante che il momento di una forza non dipende che dalla sua intensità e dalla distanza della sua direzione dall' asse. Ciò posto sia c (*fig.* 24) la proiezione dell' asse di rotazione sul piano delle due forze P e Q, di cui sia R la risultante: chiamando p, r, q le tre distanze ca, cm, cb, avremo per la legge di composizione delle forze parallele (n° 24)

$$\mathrm{P} : \mathrm{Q} = bm : am = q-r : r-p;$$

donde

$$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})r = \mathrm{P}p+\mathrm{Q}q, \quad \text{ossia } \mathrm{R}r = \mathrm{P}p+\mathrm{Q}q,$$

vale a dire che il momento Rr della risultante è eguale alla somma Pp+Qq dei momenti delle componenti.

Potremmo ancora ottenere una tendenza a rotazioni cospiranti da due forze parallele dirette in senso contrario; e ciò avrebbe luogo, quando l' asse c fosse situato tra i punti a

e b (*fig.* 25) di applicazione delle forze P e Q. Ed in questo caso dalla proporzione

$$P : Q = bm : am = q+r : r-p$$

avremo ancora

$$Rr = Pp+Qq.$$

Passiamo ora al caso, in cui le forze P e Q (*fig.* 26) tendono produrre opposte rotazioni intorno all' asse c. Dalla proporzione

$$P : Q = bm : am = q+r : p-r$$

otterremo

$$Rr = Pp-Qq,$$

vale a dire che il momento della risultante sarà eguale alla differenza dei momenti delle componenti [1].

[1] Dal teorema che il momento della risultante di due forze concorrenti in un punto pareggerà sempre la somma algebrica dei momenti delle componenti, risulta la seguente proprietà del parallelogrammo.

Se da un punto qualunque m (*fig.* 28) *giacente sul piano del parallelogrammo* ABCD *si conducano delle rette ai quattro vertici* A, B, C, D, *sarà il triangolo* mAC, *avente per base la diagonale* AC, *equivalente alla somma algebrica dei triangoli* mAD, mAB *che hanno per basi i lati contigui* AB, AD.

Ed in vero essendo AC risultante delle due forze AD ed AB, sarà pel teorema dei momenti

$$AC.ms = AB.mz+AD.mt,$$

ossia

$$2.mAC = 2.mAB+2.mAD,$$

quindi

$$mAC = mAB+mAD.$$

Per conoscere poi se i due triangoli mAB ed mAD dovranno avere lo stesso segno o segni differenti (vale a dire se il triangolo mAC dovrà essere eguale alla loro somma od alla loro differenza) si dovrà tenere la seguente regola, identica a quella che fa distinguere i momenti *positivi* dai *negativi*.

S'immagini un osservatore situato in m, *e che dopo aver fis-*

Premesse le dimostrazioni di questi due casi speciali, facile riesce la dimostrazione del teorema pel caso generale di un numero qualunque di forze P_1, P_2, P_3, P_4, ec. talune delle quali spingono a rotare in un certo senso, le altre in senso opposto. Cercando colla successiva composizione il momento della risultante di quelle forze che cospirano ad una medesima rotazione, lo troveremo eguale alla somma dei momenti delle componenti; dimodochè i due sistemi, in cui potranno in generale ordinarsi tutte le forze date, ci daranno due somme di momenti, la cui differenza esprimerà il momento della risultante finale. Quindi se riguarderemo come positivi i momenti delle forze che spingono ad una certa rotazione, e come negativi quelli delle forze che spingono a rotazione opposta, potremo esprimere il momento della risultante di più forze colla somma algebrica dei momenti delle componenti, ed avremo così

$$Rr = P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots$$ [1]

31. L'equazione dei momenti applicata al caso di una *coppia* (n° 25) diviene

$$r.0 = P(p+p');$$

nella quale espressione non è da cercarsi significato mecca-

sato lo sguardo sul punto A, *lo porti successivamente in* B *e* D. *Se la veduta successiva di questi due punti richiederà che l'occhio si muova per uno stesso verso, i due triangoli* mAB *ed* mAD *avranno lo stesso segno; ma se l'occhio dovrà girare in un senso per vedere uno dei due punti, ed in senso opposto per l'altro, i due triangoli avranno segni contrari.*

[1] Per analogia si è dato ancora il nome di *momenti* ai prodotti Px, Py, Pz che entrano nelle equazioni

$$RX = \Sigma Px, \ RY = \Sigma Py, \ RZ = \Sigma Pz,$$

che servono alla determinazione del centro di più forze parallele. Quindi si è detto: *in un sistema di forze parallele il momento della risultante, rispetto ad uno qualunque dei piani coordinati, pareggia la somma dei momenti delle componenti.*

nico; poichè l'equazione dei momenti suppone l'esistenza di una risultante, che già sappiamo inconciliabile coll'idea di coppia. Ma se ci faremo a determinarne il momento indipendentemente dall'idea di risultante, lo troveremo espresso dal prodotto di una delle forze componenti la coppia per la distanza che separa le loro direzioni. Ed in vero, agisca la coppia P,—P *(fig. 27.)* perpendicolarmente sulla retta *ab* mobile intorno al punto *c*. Immaginiamo che nel punto *b* sia applicata una forza Q eguale ed opposta alla forza —P; così il momento —P.*bc* sarà equilibrato dal momento Q.*bc*, e la retta si troverà sottoposta alla sola azione della forza P che tenderà farla girare intorno al punto *c* col momento P.*ac*. Ma questo momento è opposto al momento introdotto Q.*bc*, che ha equilibrato l'altro —P.*bc*; dunque questo ultimo prima di essere equilibrato da Q.*bc*, era cospirante col momento P.*ac*; ed in conseguenza il vero momento della coppia dovrà essere espresso da

$$P.ac + P.bc = P.ab;$$

e similmente si dimostrerebbe che il momento della stessa coppia rispetto all'asse proiettato in *c'* verrà espresso da

$$P.bc' - P.ac' = P.ab.$$

Dunque: *il momento di una coppia è misurato dal prodotto di una delle due forze per la distanza che ne separa le direzioni* — Donde segue

— 1° Che il momento di una coppia sarà lo stesso per qualunque punto del suo piano.

— 2° Che potremo far variare, sia il valore della componente P della coppia, sia il *braccio di leva ab*, distanza delle due componenti, senza che l'effetto meccanico ne venisse alterato; poichè potremo sempre soddisfare all'equazione

$$P.ab = P'.a'b',$$

qualunque delle due quantità P' ed *a'b'* sia data.

— 3° Che se a due punti A ed A′ (*fig. 29*) di un piano siano applicate due coppie, le cui componenti AB,—A′B′ ed AB′,—A′B siano rappresentate in grandezza e direzione dai quattro lati di un parallelogrammo, il piano resterà in equilibrio, poichè i due momenti opposti AB′.A′*m* ed AB.A′*n* sono eguali, esprimendo ciascuno di essi la superficie del parallelogrammo.

32. La quantità di azione meccanica di una *coppia* è dunque definita dal valore del suo momento che potremo significare coll' espressione $\overline{P, ab}$, P rappresentando una delle forze componenti la coppia, ed *ab* il suo braccio di leva. Per compierne la definizione rimane soltanto a stabilire quale delle due opposte rotazioni, che una coppia può ingenerare colla diversa direzione delle due forze, debba riguardarsi *positiva*, e quale *negativa*. A tal uopo immaginiamo una retta che pel punto medio del braccio di leva della coppia s' innalzi perpendicolarmente sul suo piano; e lungo questa retta, che nomasi *asse*, supponiamo un osservatore poggiante i piedi sul piano della coppia: sarà *positiva* la tendenza alla rotazione del piano dalla sinistra alla destra dell' osservatore [1], e *negativa* la tendenza opposta. Quindi il momento di una coppia, non altrimenti che una semplice forza, potrà essere rappresentato in grandezza e direzione da una linea retta: e siccome per una forza P (*fig. 2*) applicata ad un punto A e rappresentata dalla retta AP si suppone che la forza agisca spingendo il punto A verso P; così ancora rispetto alla coppia che fosse rappresentata dalla retta AP, supporremo

[1] L' illustre Poinsot, a cui la Meccanica razionale deve la luminosa teorica delle coppie, comparabile nel merito scientifico alla scoverta del parallelogrammo delle forze, ha riguardato come positiva la direzione da sinistra a destra, per analogia all' identica rotazione con cui la mano fa agire tutti gli strumenti destinati a concepire un simile movimento. Nè questa consuetudine manca di una buona ragion sufficiente, che il fisiologo vedrà chiaramente tosto che si faccia a considerare le leggi meccaniche che reggono le azioni muscolari delle braccia.

(oltre alla proporzionalità del suo momento alla lunghezza della retta) che la tendenza alla rotazione sia in un piano perpendicolare ad AP, e diretta dalla sinistra alla destra di un osservatore che avesse i piedi in A e la testa in P.

33. Come più forze possono in generale comporsi in una risultante, così ancora più coppie mercè la realtà dei loro momenti si possono comporre in una *coppia risultante*; e le leggi di questa composizione si trovano formolate nei seguenti teoremi.

I.

Una coppia, senz' alterare la sua azione sul corpo al quale è applicata, può essere ovunque trasportata nel suo piano od in altro piano parallelo, purchè il suo nuovo braccio di leva sia invariabilmente congiunto al primo.

Questo teorema è perfettamente analogo a quello che stabilisce l'invariabilità dell'effetto di una forza, a qualunque punto della sua direzione s'immagini applicata.

Supponiamo in primo luogo che la nuova posizione $a'b'$ *(fig. 30)* del braccio di leva della coppia sia parallela all'antica posizione ab. Immaginiamo applicate ad $a'b'$ le quattro forze P', —P', P'', —P'' tutte eguali e parallele a P; e poichè le nuove forze a vicenda si equilibrano, esse non turberanno l'azione della coppia $\overline{P,ab}$. Ma le due forze equali P e P'' si compongono nella risultante P+P'' ad esse parallela ed applicata nel punto o medio di $a'b$; ed a questo medesimo punto ed in direzione opposta si trova ancora applicata la risultante —(P+P'') delle forze —P, —P'', eguale alla risultante P+P''; dunque le quattro forze P, —P, P'', —P'' si equilibrano a vicenda, e delle sei forze del sistema non rimane che la coppia $\overline{P',a'b'}$, equivalente in conseguenza alla coppia $\overline{P,ab}$.

Fingiamo in secondo luogo che la nuova posizione del braccio di leva non sia parallela all'antica. In questa ipotesi faremo rotare il braccio ab *(fig. 31)* intorno al punto

c e nel piano della coppia, finchè nella posizione $a'b'$ divenga parallelo a quello della coppia traslata. S' introducano, come nel caso precedente, le quattro forze P', —P', P'',—P'', eguali a P e perpendicolari ad $a'b'$. Le due forze P'' e —P daranno la risultante $2P\cos\theta$, che applicata al punto m dividerà per metà l'angolo $bmb' = \pi - \theta$, ed in conseguenza passerà pel punto c, bisecando ancora l'angolo bcb'; e da un' altra parte le due forze P e —P'' daranno un'eguale risultante che passerà pel punto c in direzione opposta alla prima. Dunque P,—P, P''—P'' si equilibreranno a vicenda, e delle sei forze rimarrà soltanto la coppia $\overline{P',a'b'}$, equivalente perciò alla coppia $\overline{P,ab}$. Ma per la prima parte di questo teorema la coppia $\overline{P',a'b'}$ è eguale nella sua azione a quella di $\overline{P,ab}$ trasportata ovunque nel suo piano o in altro parallelo; dunque per questa traslazione l' effetto meccanico di $\overline{P,ab}$ non avrà sofferto alterazione alcuna.

II.

Due coppie, situate in un medesimo piano o in due piani paralleli, si comporranno sempre in una sola, equivalente alla loro somma o alla loro differenza, secondochè esse tenderanno a far girare in un medesimo senso o in senso opposto.

Questo teorema è analogo a quello che pone la risultante di due forze, agenti in una medesima linea, eguale alla loro somma o differenza, secondochè agiranno nel medesimo senso o in senso opposto.

Se le due coppie stanno in due piani paralleli, potremo pel 1° teorema trasportar l' una nel piano dell' altra; indi ridurre le loro braccia di leva in una medesima retta mn (*fig.* 32); ed in fine sostituire il braccio ab della coppia P,—P al braccio cd della coppia Q,—Q, ponendo in vece di Q la forza P' determinata dall' equazione (n° 31)

$$Q.cd = P'.ab.$$

Così su i punti a e b agiranno le forze $P+P'$ o $P-P'$, secondochè le due coppie spingeranno nel medesimo senso o in senso opposto ; ed il momento della nuova coppia sarà

$$(P+P').ab = P.ab+P'.ab = P.ab+Q.cd,$$

ovvero

$$(P-P').ab = P.ab-P'.ab = P.ab-Q.cd.$$

Vale a dire che il momento della coppia risultante sarà eguale alla somma o alla differenza dei momenti delle coppie componenti , secondochè queste avranno tendenze cospiranti ovvero opposte.

Per mezzo di questo teorema si potrà determinare il momento risultante di quante coppie si vogliono, agenti in un medesimo piano o in piani paralleli. Siano

$$\overline{P,ab},\ \overline{P',a'b'},\ \overline{P'',a''b''},\ \text{ec.}\ -\overline{Q,cd}, -\overline{Q',c'd'}, -\overline{Q'',c''d''},\ \text{ec.}$$

le coppie date. Componendo i momenti positivi nel momento risultante $P.ab+P'.a'b'+P''.a''b''+$ec. ed i momenti negativi nel loro momento risultante $-(Q.cd+Q'.c'd'+Q''.c''d''+\text{ec.})$; sarà il momento M , risultante di tutti i momenti dati , espresso dall' equazione

$$M=(P.ab+P'.a'b'+P'.a''b''+..)-(Q.cd+Q.'c'd'.Q.''c''d'+.\,).$$

III.

Due coppie non giacenti in piani paralleli, e che siano rappresentate in grandezza e direzione dalle lunghezze e direzioni dei loro assi , si comporranno in una coppia sola , il cui asse sarà rappresentato in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette che rappresentano le coppie componenti.

Teorema identico a quello del parallelogrammo delle forze.

Siano AB ed AC *(fig. 33)* le grandezze e direzioni degli assi delle coppie date : costruito il parallelogrammo ABDC ,

la diagonale AD esprimerà in grandezza e direzione l'asse della coppia risultante.

Pel punto A si conducano le due rette mn ed $m'n'$, l'una perpendicolare ad AB, l'altro ad AC: saranno queste due perpendicolari le intersezioni dei piani delle coppie col piano degli assi. Si prendano $Am = An = \frac{1}{2}AB$, $Am' = An' = \frac{1}{2}AC$; e compiuti i due parallelogrammi, è chiaro che la somma kh delle loro diagonali sarà eguale e perpendicolare alla diagonale AD.

Agli estremi delle rette mn ed $m'n'$ siano applicate le due coppie P,—P, le cui componenti supponiamo eguali all'unità di forza. Chiamando M ed N i momenti delle coppie rappresentate da AB ed AC, avremo $M = AB$ ed $N = AC$: ma $AB = mn$ ed $AC = m'n'$; sarà dunque $M = mn$, $N = m'n'$. Or essendo P l'unità di forza, i momenti della coppie $\overline{P, mn}$ e $\overline{P, m'n'}$ saranno espressi da mn ed $m'n'$; dunque le coppie $\overline{P, mn}$ e $\overline{P, m'n'}$ non solo giacceranno in piani rispettivamente paralleli a quelli delle coppie rappresentate da AB ed AC, ma ne avranno eguali i momenti e dello stesso segno, poichè gli osservatori che ne guardassero i piani dagli estremi B e C dei loro assi li vedrebbero girare da sinistra a dritta, non altrimenti che fanno le coppie rappresentate da AB ed AC. Dunque l'asse della coppia risultante di $\overline{P, mn}$ e $\overline{P, m'n'}$ dovrà necessariamente coincidere in grandezza e direzione con quello della risultante delle due coppie date.

Or le due forze —P si compongono evidentemente in una risultante —2P applicata al punto e medio di mm', ed un'altra risultante 2P, applicata al punto g medio di nn', si avrà dalle due forze P. Avremo così la coppia risultante $\overline{2P, eg}$, il cui asse sarà diretto secondo la diagonale AD. Ma essendo eg metà di hk, sarà il momento $2P.eg = P.hk$; e poichè $P = 1$, hk esprimerà il momento della coppia risultante. Ma $AD = hk$; dunque la diagonale AD disegnerà l'asse della coppia risultante in grandezza e direzione.

Corollario I. Essendo la coppia risultante ligata alle coppie componenti mercè la relazione della diagonale di un parallelogrammo ai due lati, ne segue che chiamando H il momento della coppia risultante, L ed M quelli delle coppie componenti e θ l'angolo d'inclinazione dei due assi, avremo

$$H = \sqrt{L^2 + M^2 + 2LM \cos\theta}$$

Chiamando inoltre a e b gli angoli che l'asse della coppia risultante forma con quelli a cui si riferiscono i momenti L ed M, si avrà

$$sen\, a = \frac{M . sen\, \theta}{H}, \quad sen\, b = \frac{L . sen \theta}{H};$$

quindi se $L = M$, sarà $a = b$.

Corollario II. Non potendo essere

$$\sqrt{L^2 + M^2 + 2LM \cos\theta} = 0,$$

senza che si abbia $\cos\theta = -1$, ed $L = M$, ne segue che due coppie per essere in equilibrio, debbono avere momenti eguali e direttamente opposti.

Corollario III. Se gli assi delle coppie componenti sono inclinati ad angolo retto, avremo $\cos\theta = 0$, $sen\,\theta = 1$, $sen . b = \cos a$; quindi

$$H = \sqrt{L^2 + M^2}, \quad sen . a = \frac{M}{H}, \quad \cos . a = \frac{L}{H}.$$

Corollario IV. Siano date tre coppie i cui piani s'intersechino in un medesimo punto A (*fig. 15*), e siano Az, At, As le grandezze e direzioni dei loro momenti. Componendo da prima Az con At si avrà il momento risultante Ag; indi questo con As, e si avrà il momento Ac, risultante di Az, At, As. Ma Ac è diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre rette Az, At ed As; si ha dunque il parallelepipedo delle

coppie, identico a quello delle forze. E nello stesso modo si dimostrerebbe ancora l'esistenza del poligono delle coppie.

Se i tre assi A*z*, A*t*, A*s* sono tra essi inclinati ad angolo retto, allora chiamando L, M, N i rispettivi momenti ed H il momento risultante, sarà

$$H=\sqrt{L^2+M^2+N^2};$$

e chiamando a, b, c gli angoli che l'asse A*c* forma coi tre assi A*z*, A*t*, A*s*, si avrà

$$\cos.a=\frac{L}{H},\ \cos.b=\frac{M}{H},\ \cos.c=\frac{N}{H}.$$

34. Mercè questi teoremi tutte le quistioni sulla composizione e decomposizione delle coppie si riducono agli analoghi problemi relativi alle forze che hanno uno stesso punto di applicazione. Ed in vero mediante il 1° teorema *(pag. 25)* possiamo ridurre gli assi delle coppie date a passar tutti per un medesimo punto, che toglieremo ad origine di tre assi coordinati rettangolari. Indi mercè le relazioni $H.\cos\alpha=L$, $H.\cos\beta=M$, $H.\cos\gamma=N$, decomporremo il momento H di ogni coppia (di cui α, β, γ rappresentano gli angoli che l'asse della coppia forma coi tre assi coordinati) in tre momenti componenti, che confonderanno i loro assi di rotazione con quelli delle coordinate. Avremo così ridotto tutte le coppie date a tre sistemi, ciascuno dei quali si comporrà di coppie che avranno i loro assi di rotazione in una medesima retta, positivi per talune coppie, negativi per altre, secondo i segni da cui saranno affetti i coseni degli angoli che gli assi di rotazione faranno con quelli delle coordinate. Laonde ciascuno dei tre sistemi sarà riducibile ad una sola coppia, il cui momento verrà espresso dalla somma algebrica dei momenti delle componenti; quindi disegnando con G ciascuno dei momenti dati, e con X, Y, Z i momenti risultanti dei tre sistemi, avremo

$$X=\Sigma G\cos\alpha,\ Y=\Sigma G\cos\beta,\ Z=\Sigma G\cos\gamma,$$

donde (chiamando H il momento risultante di tutti i momenti dati) si otterrà

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} ;$$

e le tre equazioni

$$cos.a = \frac{X}{H}, \quad cos.b = \frac{Y}{H}, cos.c = \frac{Z}{H}$$

determineranno gli angoli a, b, c che l'asse del momento risultante H farà con quelli delle x, y, z.

Or perchè il sistema delle coppie date sia in equilibrio, dovrà essere $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; le quali tre ultime equazioni, non altrimenti che nel caso di più forze agenti sopra uno stesso punto, saranno necessarie e sufficienti condizioni di equilibrio per un sistema di coppie i cui momenti siano riferiti ad un sistema qualunque di assi coordinati.

CAPO QUARTO.

Applicazione delle teoriche precedenti alla determinazione dei centri di gravità.

Scopo di questa teorica — Riduzione delle formole del n° 26 al caso della continuità — Applicazione delle formole generali alla determinazione del centro di gravità di un arco di curva data— Esempi — Applicazione delle formole generali alla ricerca del centro di gravità delle superficie — Determinazione del centro di gravità dell' ottante di una superficie sferica — Teorema relativo al centro di gravità di una calotta o zona sferica — Misura del tronco di cilindro — Riduzione delle formole precedenti al caso di una superficie piana. Esempi — Applicazione delle formole generali alla ricerca del centro di gravità delle superficie di rotazione. Esempi — Applicazione delle stesse formole alla ricerca dei centri di gravità dei solidi — Caso dei solidi simmetrici rispetto ad un asse. Solidi di rotazione : centro di gravità di un segmento di sfera, di ellissoide, paraboloide ed iperboloide di rotazione — Centro di gravità di una piramide e di un cono — Centro di gravità di un settore sferico—Teorema di Guldin — Di talune proprietà generali dei centri di gravità.

35. Agendo la gravità secondo la normale alla superficie delle acque stagnanti nel luogo dell' osservazione [1], le sue direzioni dovranno risultare parallele per tutti quei punti della superficie terrestre, che si potranno riguardare comuni al piano tangente condotto per uno di essi. E sapendosi inoltre che la gravità opera egualmente sopra ogni molecola, qualunque ne sia la natura ; è chiaro che non considerando nei corpi altr' attività se non quella derivante dall' attrazione della terra, noi potremo riguardarli come sistemi continui di punti animati da forze parallele eguali.

In tal modo la Meccanica razionale toglie dalla Fisica il problema dei centri di gravità, ed elevandolo alla generalità che l' è propria ; lo presenta nel seguente modo : —

[1] Ved. la mia Fisica — *tom.* I. n° 25.

Data la legge geometrica di un sistema continuo di punti, ai quali siano applicate altrettante forze parallele, eguali e dirette in un medesimo senso, determinare le coordinate del loro centro — Quindi allorchè la Meccanica considera i centri di gravità delle linee, delle superficie e dei volumi, non riguarda queste forme dell' estensione come se fossero dotate di peso, ma semplicemente ripone in esse la legge di continuità dei punti, ai quali immagina applicate le forze parallele.

36. Le formole (n° 26)

$$X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad Z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P},$$

suppongono discontinui i punti di applicazione ed ammettono un valore qualunque per ciascuna delle forze ad essi applicate. Ma sarà facile adattarle all' ipotesi della continuità dei punti e dell' eguaglianza delle forze, se riguarderemo il luogo geometrico dei punti diviso nei suoi elementi infinitesimi, a ciascuno dei quali supporremo applicata la risultante di tutte le forze agenti su i punti in esso elemento contenuti. Or questa risultante elementare, poichè deve pareggiare la somma delle sue componenti, dovrà essere rappresentata da $P\omega$, P indicando la forza applicata a ciascun punto, ed ω l' elemento infinitesimo al quale è proporzionale il numero dei punti. Quindi chiamando x, y, z le coordinate del sito occupato da ω, avremo

$$\Sigma P = \int P\omega, \quad \Sigma Px = \int P\omega x, \quad \Sigma Py = \int P\omega y, \quad \Sigma Pz = \int P\omega z.$$

Perciò nell' ipotesi di P costante in tutto il sistema dei punti di applicazione, le coordinate del centro saranno date dalle equazioni

$$X = \frac{\int \omega x}{\int \omega}, \quad Y = \frac{\int \omega y}{\int \omega}, \quad Z = \frac{\int \omega z}{\int \omega}.$$

È d' uopo purtuttavia osservare che applicando queste for-

mole alla ricerca del centro di gravità di un corpo, non dovremo prendere la continuità dei punti di applicazione nel senso rigoroso della Geometria, ma dovremo piuttosto ravvicinarla al concetto del fisico che riguarda l'acqua come una massa continua, quantunque sappia che le molecole di essa sono separate da intervalli circa tre volte maggiori delle distanze che separano le molecole del platino [1]. E concependo in tal modo questa che chiamerei *continuità fisica*, egli è facile prevedere che potremo rinvenirla *uniforme* in taluni corpi e *varia* in altri. La continuità sarà uniforme, quando ogni elemento di volume conterrà lo stesso numero di molecole; tal'è per esempio l'acqua nell'ipotesi che la sua massa non abbia una profondità enorme. Per l'opposto la continuità è varia nei corpi, la cui struttura presenta molte cavità interiori.

Le formole qui sopra esposte pel caso di una continuità

[1] Chiamando δ la distanza che separa due molecole di acqua, nell'unità di lunghezza questo fluido conterrà $\frac{1}{\delta}+1$ molecole, e nell'unità di volume ne conterrà $\left(\frac{1}{\delta}+1\right)^3$. Similmente chiamando δ' la distanza che separa due molecole di platino, l'unità di volume di questo metallo ne conterrà $\left(\frac{1}{\delta'}+1\right)^3$. E poichè il platino ha una densità 21 volte maggiore di quella dell'acqua, dovrà essere

$$\left(\frac{1+\delta'}{\delta'}\right)^3=21\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^3.$$

Ma δ e δ' sono frazioni pressocchè infinitesime, e perciò trascurandole rispetto all'unità, avremo

$$\frac{1}{\delta'}=\frac{1}{\delta}\sqrt[3]{21},$$

donde

$$\delta:\delta'=1:\sqrt[3]{21}=1:2,7.$$

geometrica nei punti di applicazione, saranno immediatamente applicabili alla continuità uniforme dei sistemi molecolari; imperocchè la diversità che potrà rinvenirsi nei valori di P, quando si passi da un sistema all'altro, starà tutta nella densità ρ del sistema, il cui valore numerico sarà fattore di P; e perciò il prodotto ρP rimarrà egualmente eliminato dai quozienti degl'integrali, e non potrà influire sui valori delle coordinate del centro. Donde poi si rileva che i sistemi molecolari geometricamente simili, purchè abbiano una continuità uniforme, qualunque d'altronde ne sia il valore, avranno i loro centri di gravità similmente situati.

Ma se la continuità del sistema è varia, il prodotto ρP varierà secondo il luogo occupato dall'elemento ω; e perciò le funzioni $\int \rho\omega$, $\int \rho\omega x$, ec. rimarranno indeterminabili, finchè non sia data l'equazione

$$\rho = f(x, y, z).$$

che faccia conoscere la densità in funzione delle coordinate del luogo occupato dall'elemento.

37. Le formole generali date nel n° precedente ammettono tre categorie di applicazione, le linee, le superficie, i volumi. Cominciando dalla prima, supponiamo una curva riferita a tre piani rettangolari, e data dal sistema delle due equazioni

$$y = fx, \quad z = \varphi x.$$

L'elemento ds della curva dovendosi confondere colla diagonale del parallelepipedo rettangolare di cui dx, dy, dz sono i tre spigoli, avremo

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2}.$$

Sostituito questo valore di ω nelle equazioni generali, ed estesi gl'integrali dal limite $x = a$ fino ad $x = b$, avremo le

tre coordinate del centro di gravità della curva per mezzo delle equazioni

$$\mathrm{XL}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2+\left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2}.\,xdx\,,$$

$$\mathrm{YL}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2+\left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2}.\,fxdx$$

$$\mathrm{ZL}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2+\left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2}.\,\varphi xdx.,$$

nelle quali si è fatto $\mathrm{L}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2+\left(\frac{d.\varphi x}{dx}\right)^2}.\,dx.$

38. *Esempî.*

I.

Determinare il centro di gravità di una linea retta.

Siano

$$y=px+q\ ,\ z=p'x+q'$$

le due equazioni della retta. Avremo in conseguenza, ponendo che a e b siano le ascisse dei punti estremi,

$$\mathrm{L}=(b-a)\sqrt{1+p^2+p'^2}$$

$$\mathrm{X.L}=\tfrac{1}{2}\,(b^2-a^2)\sqrt{1+p^2+p'^2}$$

$$\mathrm{Y.L}=\left[\tfrac{1}{2}p(b^2-a^2)+q(b-a)\right]\sqrt{1+p^2+p'^2}$$

$$\mathrm{Z.L}=\left[\tfrac{1}{2}p'(b^2-a^2)+q'(b-a)\right]\sqrt{1+p^2+p'^2}\ ;$$

donde si ottengono

$$X=\frac{1}{2}(a+b)\,,\quad Y=\frac{1}{2}p(a+b)+q\,,\quad Z=\frac{1}{2}p'(a+b)+q'\,,$$

che sono le coordinate del punto medio della retta, come doveva risultare.

II.

Determinare il centro di gravità di un arco di elice.

Prendendo per piano delle x, y quello della base dell'elice, l'equazione della sua proiezione su quel piano sarà

$$y^2=a^2-x^2\,;$$

e poichè la z di ogni suo punto aumenta come l'arco di evoluzione, mercè la quale è generata, avremo, prendendo l'origine della curva in uno degli estremi dell'asse delle y

$$z=na.\text{arco sen}\,\frac{x}{a},$$

n disegnando la ragione della lunghezza del passo a quella della circonferenza che serve di base all'elice.

Quindi si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,\quad \frac{dz}{dx}=\frac{na}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole generali del n° 37, avremo

$$ds=a\sqrt{1+n^2}\,\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,$$

$$s=a\sqrt{1+n^2}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\sqrt{1+n^2}.\text{arco sen}\,\frac{x}{a}\,,$$

$$X=\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{\text{arco sen}\,\frac{x}{a}}$$

$$Y = \frac{\int_o^x o\,dx}{\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{x}{arco\ sen\ \frac{x}{a}}$$

$$Z = \frac{\int_o^x na.arco\ sen\ \frac{x}{a}.\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \tfrac{1}{2}na.arco\ sen\ \frac{x}{a}$$

Facendo in queste formole $x=0$, ed estendendo gl' integrali per gli archi da 0 a π, 2π, 3π ec. si avranno le coordinate del centro di gravità dell' arco di elice per mezzo giro, un giro intero, un giro e mezzo, ec.

III.

Determinare il centro di gravità di un arco di cerchio.

Sia ACB *(fig. 34)* l' arco dato, ed O il centro : si divida ACB per metà nel punto C, e condotto il raggio OC, si prenda questo per asse delle x ed O per origine. Avremo così l' equazione

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

dalla quale otterremo

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ;$$

quindi

$$X = \frac{\int \frac{axdx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\int ds} = \frac{-a\sqrt{a^2-x^2}}{s} = \frac{-ay}{s}$$

ed

$$Y = \frac{\int adx}{\int ds} = \frac{ax}{s} = \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{s}.$$

Chiamando c la corda che sottende l'arco, $-\frac{1}{2}c$ e $+\frac{1}{2}c$ saranno i limiti dei valori di y, i quali introdotti negl' integrali precedenti, ci daranno

$$X = \frac{ac}{s}, \ Y = 0.$$

Vale a dire che : *il centro di gravità di un arco di cerchio giace sul raggio che lo divide per metà, e la sua distanza dal centro è quarta porporzionale in ordine all' arco, alla corda ed al raggio.*

IV.

Determinare il centro di gravità di un arco parabolico.

Dall' equazione della parabola

$$y^2 = 2ax$$

abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \ \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{y^2} = \frac{a}{2x};$$

quindi

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1 + \frac{a}{2x}}$$

$$s = \int dx\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} = x\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} + \frac{a}{4}\,log. \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} - 1} + C.$$

Essendo noto s, avremo l'ascissa del centro per mezzo dell' equazione

$$X.s = \int x dx\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} = \int dx\sqrt{x^2 + \frac{a}{2}x} = \int dx\sqrt{\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}a^2}$$

nella quale ponendo z in vece di $x + \frac{1}{4}a$, avremo da cercare $\int dz\sqrt{z^2 - \frac{1}{16}a^2}$.

Trattando questa funzione col metodo dell'integrazione per parti, avremo

$$\int dz\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}=z\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}-\int\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}.$$

Daltronde si ha evidentemente

$$\int dz\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}=\int\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}-\frac{a^2}{16}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}.$$

Addizionando queste due espressioni equivalenti si ha

$$\int dz\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}=\frac{z}{2}\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}-\frac{a^2}{32}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}.$$

Ma

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}=\int\frac{dz\left(1+\dfrac{z}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}\right)}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}\left(1+\dfrac{z}{\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}\right)}$$

$$=\int\frac{d(z+\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2})}{z+\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}}=\overset{e}{log}\,(z+\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2})$$

quindi

$$\int dz\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}=\frac{z}{2}\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2}-\frac{a^2}{32}\overset{e}{log}\,(z+\sqrt{z^2-\tfrac{1}{16}a^2})+C$$

$$=\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{4}a)\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}ax}-\frac{a}{32}\overset{e}{log}\left[x+\tfrac{1}{2}ax+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}ax}\right]+C.$$

L'ordinata poi del centro ci sarà data dall'equazione

$$Y.s=\int y\,ds=\int\sqrt{2ax}\sqrt{1+\frac{a}{2x}}dx=\int dx\sqrt{2ax+a^2}$$

$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{a}\,(a+2x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

V.

Determinare il centro di gravità di un arco di cicloide.

Prendendo ad origine il punto culminante A (*fig. 35*) della cicloide, e gli assi rettangolari Ax, Ay, il primo dei quali è perpendicolare alla base della cicloide, l'equazione di questa curva sarà

$$y = a.\text{arco sen vers}\,\frac{x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}\ ^{1},$$

a indicando il raggio della circonferenza generatrice. Quindi avremo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sqrt{\frac{2a}{x} - 1},$$

e

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}},$$

donde

$$s = 2\sqrt{2ax}.$$

Mediante queste funzioni avremo le coordinate del centro

$$X = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{\int x\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx}{2\sqrt{2ax}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2ax^3}}{2\sqrt{2ax}} = \frac{1}{3}x,$$

[1] Essendo in virtù della legge di generazione della cicloide

$$\text{arco.Anc} = sc,$$

sarà

$$tc = \text{arco Anc} - st = \text{arco.Anc} - \text{arco.}tm = \text{arco.An}.$$

Ma

$$mq = tc + mp\,;$$

sarà dunque

$$mq = \text{arco.An} + nq = \text{arco.sen vers}\,\frac{x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}.$$

$$Y = \frac{\int y ds}{s} = \frac{\int y \sqrt{\frac{2a}{x}}\, dx}{2\sqrt{2ax}} = \frac{\int y.x^{-\frac{1}{2}} dx}{2\sqrt{x}}.$$

Or integrando per parti, avremo

$$\int y.x^{-\frac{1}{2}} dx = 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{x}.dy = 2y\sqrt{x} - 2\int dx\sqrt{x}\sqrt{2a.x^{-1} - 1}$$

$$= 2y\sqrt{x} + \frac{4}{3}(2a - x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

E poichè $\int y.x^{-\frac{1}{2}} dx$ è nullo insieme ad x ed y, avremo
$C = -\frac{4}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}$;

quindi

$$\int_0^x y.x^{-\frac{1}{2}} dx = 2y\sqrt{x} + \frac{4}{3}\left[(2a - x)^{\frac{3}{2}} - (2a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Sostituito questo valore nel numeratore dell' ordinata del centro, avremo

$$Y = y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2a - x)^{\frac{3}{2}} - (2a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

39. Or passiamo ad applicare le formole generali del n° 36 al caso di una superficie definita dall' equazione

$$z = f(x, y).$$

Poichè l' elemento di una superficie curva si confonde nel punto di contatto coll' elemento del piano tangente, potremo sostituire il secondo elemento al primo. Or supponiamo l' elemento del piano definito dalla sua proiezione $dydx$ sul piano delle x, y; ne avremo l' espressione dividendo il prodotto $dydx$ pel coseno dell' angolo d' inclinazione del piano

tangente su quello delle y,x. Egli è chiaro che quest' angolo sarà eguale a quello che la normale al punto di contatto forma coll' asse delle z, ed il cui coseno è rappresentato (n° 22) da

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

quindi avremo l' elemento del piano tangente (ossia della superficie curva nel punto del contatto definito dalle coordinate z, y, x) espresso da

$$dydx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Sostituendo questo valore di ω nelle formole del n° 36, e chiamando A l' estensione della superficie data, avremo

$$\int\omega=\iint dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\text{A}$$

$$\int\omega x=\iint xdxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\text{AX}$$

$$\int\omega y=\iint ydxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\text{AY}$$

$$\int\omega z=\iint zdxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\text{AZ}.$$

40. Prendiamo ad esempio la ricerca del centro di gravità di un ottante di superficie sferica. L' equazione della superficie essendo

$$z^2=a^2-x^2-y^2,$$

avremo

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z};$$

quindi

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Perciò sarà

$$A = a\int_0^a dx \int_0^{y'} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Ma

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = arco\ sen\ \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} + \text{C},$$

che preso tra i limiti $y=0$ ed $y=y'=\sqrt{a^2-x^2}$, ci dà $\frac{1}{2}\pi$ per valore dell' integrale definito. Così avremo

$$A = \tfrac{1}{2}\pi a \int_0^a dx = \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

Similmente otterremo

$$\int \omega x = a\int_0^a xdx \int_0^{y'} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \tfrac{1}{2}\pi a \int_0^a xdx = \tfrac{1}{4}\pi a^3$$

$$\int \omega y = a\int_0^a ydy \int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}} = \tfrac{1}{2}\pi a \int_0^a ydy = \tfrac{1}{4}\pi a^3$$

$$\int \omega z = a\int_0^{\sqrt{a-x^2}} dy \int_0^a dx = a\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{4}\pi a^3.$$

Quindi avremo le tre coordinate del centro di gravità

$$\text{X} = \text{Y} = \text{Z} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \tfrac{1}{2}a.$$

Volendo applicare le stesse formole alla determinazione del centro di gravità di una zona sferica, prenderemo come piano delle $z\,y$ (*fig. 37*) quello del cerchio massimo parallelo alle basi della zona le cui distanze dal centro siano $ot=x'$, $os=x''$; e facendo $y'=\sqrt{a^2-x^2}$, avremo per gl'integrali estesi a tutta la zona

$$2a\iint\frac{dydx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_{x''}^{x'}dx\int_{-y'}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2\pi a(x'-x''),$$

$$2a\iint\frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_{x''}^{x'}xdx\int_{-y'}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\pi a(x'^2-x''^2)$$

$$2a\iint\frac{ydydx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_{x''}^{x'}dx\int_{-y'}^{y'}\frac{ydy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=0$$

$$2a\iint\frac{zdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=(a-a)\int_{x''}^{x'}dx\int_{-y'}^{y'}dy=0\ ^{1};$$

donde

$$X=\tfrac{1}{2}(x'+x''),\ Y=0,\ Z=0.$$

Ma se contiamo la x del centro di gravità non dal centro della sfera, ma dal centro t della base superiore della zona, avremo

$$X=x'-\frac{x'+x''}{2}=\frac{x'-x''}{2};$$

[1] Essendo $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, si è ottenuto

$$a\iint\frac{zdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\iint dxdy,$$

il quale preso tra i limiti più estesi $x=x'$, $x=x''$, $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, esprime la proiezione della semizona sul piano delle xy. Or se lo duplichiamo, non l'estenderemo già a tutta la zona, poichè le proiezioni delle due metà di essa sul piano delle $x\,y$ sono eguali e di segni contrarî (n° 17). Laonde in vece di premettere all'integrale il fattore $2a$, vi abbiamo apposto il fattore $a-a$.

vale a dire che il centro di gravità di una zona sferica giace nel punto medio della sua altezza. La stessa regola vale ancora per la calotta.

41. Lasciando sotto la sua forma generale l'espressione della z del centro di gravità di una parte di qualsivoglia superficie curva, avremo

$$Z = \frac{\iint z dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\iint dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Ma nell'ipotesi di una superficie sferica abbiamo

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{z}{a};$$

dunque si avrà in tal caso

$$Z = a \frac{\iint dy dx}{\iint dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$$

Or qualunque sia la porzione di superficie sferica che si voglia considerare, $\int\int dx dy$ n'esprimerà la proiezione sul piano delle xy, e $\iint dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ ne disegnerà l'estensione; quindi:

La distanza dal piano delle xy *del centro di gravità di qualsiasi parte di una superficie sferica, è quarta proporzionale in ordine all'estensione di essa parte, alla sua proiezione sul piano delle* xy *ed al raggio della sfera.*

Questo teorema ci offre un secondo metodo per determinare il centro di gravità di una calotta o zona sferica. Pren-

dendo per piano delle xy quello del cerchio massimo parallelo alla base della calotta o della zona, è chiaro che per la simmetria delle due figure rispetto all' asse delle z menato pel centro della sfera, su questo asse dovranno giacere i loro centri di gravità. Or dalla Geometria sappiamo che la superficie di una calotta si misura moltiplicando la circonferenza del cerchio massimo per l' altezza di essa calotta; quindi rappresentando ab (*fig. 36*) il piano delle xy, cd la base della calotta, e facendo il raggio $od = a$, ed $on = z'$; $2\pi a(a-z')$ esprimerà la superficie della calotta. D' altronde facendo $nd = x'$, $\pi x'^2 = \pi(a^2-z'^2)$ n' esprimerà la proiezione sul piano delle xy. Così avremo

$$X = a\frac{a+z'}{2a} = \frac{a+z'}{2}.$$

E supponendo che op rappresenti Z, avremo

$$pn = Z - z' = \frac{a+z'}{2} - z' = \frac{a-z'}{2} = \tfrac{1}{2}mn.$$

Vale a dire che il centro di gravità di una calotta sferica giace nel punto medio della sua altezza.

Lo stesso ha luogo ancora per una zona sferica. Facendo $on = z'$ (*fig. 36*) e $on' = z''$, avremo che l' altezza della zona (di cui $nd = x'$ ed $n'd' = x''$ sono i raggi delle basi) sarà $dq = z'-z''$, quindi la sua superficie sarà $2\pi a(z'-z'')$ e la sua proiezione sul piano della $x\ y$ sarà $\pi(x''^2 - x'^2)$ $= \pi\Big[(a^2-z''^2)-(a^2-z'^2)\Big] = \pi(z'^2-z''^2)$. Quindi

$$Z = a\,\frac{\pi(z'^2-z''^2)}{2\pi a(z'-z'')} = \frac{z'+z''}{2};$$

E supponendo $oq = Z$, sarà

$$qn' = Z - z'' = \frac{z'+z''}{2} - z'' = \frac{z'-z''}{2} = \tfrac{1}{2}nn'.$$

42. Dalla stessa equazione

$$A.Z = \iint z dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

si può ancora dedurre la misura di un tronco di cilindro. Sia *abcd* (*fig. 38*) il tronco dato; e supponiamo che la generatrice *ab* sia perpendicolare al piano della base *bd*. Riponiamo in questa il piano delle xy, e sia parallelo ad *ab* l'asse delle z. Essendo $dxdy$ l'elemento della base *bd*, sarà $zdxdy$ quello del volume V del tronco; quindi avremo

$$V = \int\int z dx dy.$$

Chiamando φ l'angolo d'inclinazione dei piani delle due basi, ed A la base inferiore, sarà la base superiore.

$$A' = \frac{A}{\cos\varphi};$$

e supponendo inoltre l'asse delle x perpendicolare alla comune intersezione dei piani delle basi, sarà

$$\frac{dz}{dx} = \tang\varphi\,,\ \frac{dz}{dy} = 0,$$

quindi

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\tang^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Laonde

$$\frac{A}{\cos\varphi} Z = \iint \frac{z dx dy}{\cos\varphi};$$

ossia

$$A.Z = \int\int z dx dy.$$

Dunque il volume di un tronco di cilindro retto dev'essere espresso dal prodotto della base inferiore per la distanza che la separa dal centro di gravità della base superiore.

Or esprimendo $dxdy$ un elemento della base inferiore A, sarà $\frac{dxdy}{cos\varphi}$ quello della base superiore A'; e prendendone i momenti M ed M' rispetto ad un piano parallelo alla generatrice ab, avremo

$$M = \int\int \lambda dxdy \ , \ M' = \frac{1}{cos\varphi}\int\int \lambda dxdy,$$

λ disegnando la distanza di ciascun elemento di superficie dal piano dei momenti. Sarà dunque

$$M : M' = cos\varphi : 1 ;$$

quindi ponendo $M = 0$, sarà anche $M' = 0$; vale a dire che i centri di gravità delle due basi A ed A' staranno sopra una retta parallela ad ab; e sulla quale giaceranno in conseguenza i centri di gravità di tutte le sezioni fatte sul cilindro con piani comunque inclinati.

Ciò posto, supponiamo che il tronco di cilindro sia obbliquo, come $apsc$ (*fig. 38*). Facendovi la sezione bd perpendicolare ab ab, il tronco $apsc$ risulterà differenza di $abdc$ e $bpsd$. Ma sappiamo che

$$abdc = A.mn \, , \text{ e } bpds = A.tn \, ;$$

quindi

$$apsc = A(mn - tn) = A.mt.$$

Or conducendo dal centro di gravità m della base superiore la perpendicolare mq sul piano della base inferiore ps, e pel punto s la sh parallela al piano bd; sarà l'angolo $qmt = psh = \varphi$, angolo d'inclinazione dei due piani ps e bd. Quindi chiamando A'' la base ps del tronco obbliquo, sarà $A = A'' cos\varphi$, ed $mt = \frac{mq}{cos\varphi}$; perciò

$$A.mt = A''cos\varphi \frac{mq}{cos\varphi} = A''.mq.$$

Dunque: *il volume di un tronco di cilindro qualunque è misurato dal prodotto di una delle basi per la perpendicolare abbassatavi dal centro di gravità dell' altra base.*

43. Se la superficie, di cui si cerca il centro di gravità, è piana, porremo in essa gli assi delle x, y. Avremo così $z=0$, e perciò $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=1$. Quindi

$$\int \omega = \int\int dydx = \int ydx$$

$$\int \omega x = \int\int xdydx = \int yxdx$$

$$\int \omega y = \int\int ydydx = \tfrac{1}{2}\int y^2dx.$$

E le due coordinate del centro saranno

$$\mathrm{X} = \frac{\int yxdx}{\int ydx}\ ,\quad \mathrm{Y} = \frac{\frac{1}{2}\int y^2dx}{\int ydx}$$

Esempi.

I.

Determinare il centro di gravità di un triangolo.

Sia ABC (*fig. 39*) il triangolo dato. Si ponga l'origine in A; AB sia l'asse delle x, ed Ay, parallela a BC, sia quello delle y. Chiamiamo θ l'angolo degli assi, e facciamo AB $=\alpha$, BC $=\beta$: sarà $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ l'equazione della retta AC; quindi

$$sen\theta\int ydx = sen\,\theta\frac{\beta}{\alpha}\int xdx\ ,$$

$$sen\theta\int yxdx = sen\theta\frac{\beta}{\alpha}\int x^2dx$$

$$\tfrac{1}{2}sen\theta\int y^2dx = \tfrac{1}{2}sen\theta\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int x^2dx.$$

Laonde

$$X = \frac{\int_o^\alpha x^2 dx}{\int_o^\alpha x dx} = \tfrac{2}{3}\alpha\,,\quad Y = \frac{\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}\int_o^\alpha x^2 dx}{\int_o^\alpha x dx} = \tfrac{1}{3}\beta.$$

Or congiungendo il vertice C col punto o medio di AB, l'equazione della congiungente Co sarà

$$y = \frac{2\beta}{\alpha}\left(x - \tfrac{1}{2}\alpha\right);$$

nella quale ponendo $x = \frac{2}{3}\alpha$, si ottiene $y = \frac{1}{3}\beta$ — Dunque il centro di gravità di un triangolo giace sulla retta che unisce il vertice col punto medio della base. — E poichè dall'essere $gm = \frac{1}{3}$BC risulta $go = \frac{1}{3}$Co; segue che il centro di gravità del triangolo giace sulla detta bisecante ai due terzi della sua lunghezza, cominciando dal vertice.

Questo risultamento delle formole è rifermato dalla seguente costruzione geometrica — Condotta la Co al punto medio di AB, s'immagini il triangolo diviso in elementi rettilinei paralleli alla stessa AB. Questa retta dividerà in due parti eguali ogni elemento, e perciò ne conterrà il centro di gravità; in conseguenza quello dell'intera figura dovrà giacere sulla Co. Similmente avremo che dividendo la AC in due parti eguali nel punto n, e congiungendo questo punto con B, il centro di gravità del tringolo dovrà trovarsi ancora sulla Bn, e quindi nel punto g della sua intersezione colla Co. Or congiungendo n con o, i due triangoli simili ogn, BgC ci daranno la proporzione

$$go : gc = on : \text{BC} = \text{A}n : \text{AC} = 1 : 2.$$

Così essendo $go = \frac{1}{2}$Cg, sarà $go = \frac{1}{3}$ Co.

II.

Determinare il centro di gravità di un trapezio.

Sia ABCD *(fig. 40)* il trapezio dato: A sia l'origine, AD l'asse delle x, AB quello delle y, e θ l'angolo della loro inclinazione. Facendo $AB = 2p$, $DC = 2q$, $AD = a$, l'equazione della retta BC sarà

$$y = 2\frac{q-p}{a}x + 2p;$$

quindi

$$\begin{aligned} sen\theta\int ydx &= 2\frac{q-p}{a}\,sen\theta\int_o^a xdx + 2p\,sen\theta\int_o^a dx \\ &= (q-p)a\,sen\theta + 2pa\,sen\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sen\theta\int yxdx &= 2\frac{q-p}{a}\,sen\theta\int_o^a x^2dx + 2p\,sen\theta\int_o^a xdx \\ &= \tfrac{2}{3}(q-p)a^2 sen\theta + pa^2 sen\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}sen\theta\int y^2dx &= \tfrac{1}{2}sen\theta\int_o^a\left(2\frac{q-p}{a}x+2p\right)^2dx \\ &= \tfrac{2}{3}a.sen\theta\left[p^2+pq+q^2\right]. \end{aligned}$$

In conseguenza

$$X = \frac{a}{3}\cdot\frac{2q+p}{q+p},\quad Y = \frac{2}{3}\cdot\frac{p^2+pq+q^2}{p+q}.$$

Or se conduciamo kl che congiunge i punti medi delle due basi parallele del trapezio, l'equazione di questa bisegante sarà

$$y = \frac{q-p}{a}x + p;$$

nella quale facendo

$$x = \frac{a}{3}\cdot\frac{2q+p}{p+q},$$

risulterà

$$y=\frac{2}{3}\cdot\frac{p^2+pq+q^2}{p+q}\;.$$

Dunque il centro di gravità di un trapezio giace sulla retta che bisega le basi parallele; e per averne la distanza dalla base $2p$, osserviamo che per un noto teorema di Geometria abbiamo

$$Am:AD=kg:kl.$$

Quindi se Am è l'ascissa del centro presa sulla retta AD, kg sarà l'ascissa dello stesso centro quando si tolga per asse kl; e perciò in vece di AD indicando con a la lunghezza kl, la distanza kg del centro g dalla base $AB=2p$ sarà data dall'equazione

$$X=\frac{a}{3}\cdot\frac{2q+p}{p+q}\,.$$

III.

Determinare il centro di gravità di un settore e di un segmento circolare.

Sia ABC (*fig. 41*) il settore dato. Facciamo $AB=r$, l'arco $AC=2\alpha$, e θ ne sia il valore angolare. Pel punto D, medio dell'arco AC si conduca il raggio BD, dal quale si comincino a contare i valori di θ; e rapportando il settore a coordinate polari, avremo a meno di un infinitesimo di 3° ordine, l'elemento di superficie $tsvz$ espresso da $rdrd\theta$, poichè $vz=dr$ e $vs=rd\theta$. Quindi

$$\int\omega=\int_0^r\int_{-\alpha}^{\alpha}rdrd\theta=r^2\alpha\,;$$

ed essendo $x=r.\cos\theta$, $y=r.\operatorname{sen}\theta$, saranno

$$\int\omega\,x=\int_0^r\int_{-\alpha}^{\alpha}r^2dr\cos\theta d\theta=\tfrac{2}{3}r^3\operatorname{sen}\alpha\,,$$

$$\int \omega y = \int_0^r \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 dr\, sen\theta d\theta = 0.$$

Dunque il centro di gravità di un settore circolare giace sul raggio che ne divide l'arco per metà; e la sua distanza dal centro sarà data dall'equazione

$$X = \frac{\int \omega x}{\int \omega} = \frac{2}{3} . r \frac{sen\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} . r \frac{2sen\alpha}{2\alpha} = \frac{2}{3} . r \frac{corda AC}{arco\ AC} ;$$

vale a dire che la sua distanza dal centro di figura è quarta proporzionale in ordine all'arco, alla corda ed ai $\frac{2}{3}$ del raggio.

Or se col raggio $Bm = \frac{2}{3} BA$ descriviamo l'arco *mn*; il centro di gravità di questo arco starà sul raggio BD che lo biseca, e la sua distanza dal centro di figura sarà (n° 38)

$$X = \frac{2}{3} r \frac{corda.mn}{arco.mn} = \frac{2}{3} r \frac{\frac{2}{3} corda AC}{\frac{2}{3} arco AC} = \frac{2}{3} r \frac{corda AC}{arco AC}.$$

Dunque il centro di gravità dell'arco *mn* coincide con quello del settore ABC. Nè poteva risultare diversamente: ed in vero dividendo il settore in elementi triangolari aventi per basi gli elementi dell'arco AC ed in B il vertice comune, ciascuno di essi avrà il suo centro di gravità ai due terzi della sua altezza, ossia del raggio del settore; quindi i centri di tutti gli elementi triangolari staranno sull'arco *mn* descritto col raggio $Bm = \frac{2}{3} AB$, e perciò i centri di gravità del settore BAC e dell'arco *mn* si confonderanno in un medesimo punto.

Determinato il centro di gravità del settore, sarà facile definire quello del segmento, considerando che il settore ABCD (*fig. 42*) è somma del triangolo ABC e del segmento BDC*o*. La simmetria di queste tre figure rispetto al raggio AD che biseca l'arco BC, fa sì che i loro centri di gravità stiano su quel raggio. Prendendolo ad asse delle ascis-

se, chiamiamo x_1 l'ascissa del centro di gravità del settore, x_2 quella del centro del triangolo, ed x quella del segmento; così avremo

$$settore.x_1 = triang.x_2 + segm.x;$$

e poichè $Bo = sen.\alpha$, ed $Ao = \sqrt{r^2 - sen^2\alpha}$, l'equazione precedente diverrà

$$\tfrac{2}{3} r^2 sen\,\alpha = \tfrac{2}{3}\, sen\,\alpha\,(r^2 - sen^2\alpha) + segm.x;$$

donde

$$x = \frac{\tfrac{2}{3}\, sen^3\alpha}{segmento} = \frac{\tfrac{1}{12} c^3}{segmento},$$

sostituendo a Bo la metà della corda $BC = c$.

Lo stesso risultamento si otterrebbe risolvendo direttamente il problema mediante l'equazione

$$X = \frac{\int yxdx}{segmento} = \frac{\int_{\frac{1}{2}c}^{-\frac{1}{2}c} \sqrt{r^2 - x^2}.xdx}{segmento}$$

IV.

Determinare il centro di gravità di un segmento di parabola.

Sia CAD (*fig.* 43) il segmento dato. Pel punto m medio della corda DC si conduca A'L parallela all'asse AK: sarà A'L un diametro, che preso ad asse delle x ci darà per la parabola l'equazione $y^2 = 2ax$. Mediante questa relazione avremo, chiamando φ l'angolo d'inclinazione della corda DC al diametro A'L,

$$\int \omega = sen\varphi \int \sqrt{2ax}.dx$$

$$\int \omega x = sen\varphi \int x\sqrt{2ax}.dx$$

$$\int \omega y = \tfrac{1}{2}\, sen\,\varphi \int 2ax.dx;$$

quindi

$$X=\frac{\int_o^{x'} x^{\frac{3}{2}}dx}{\int_o^{x'} x^{\frac{1}{2}}dx}=\tfrac{3}{5}x',\ Y=\frac{\frac{1}{2}\int 2axdx}{\int\sqrt{2ax}.dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-y'}^{y'} y^3dy}{\int_{-y'}^{y'} y^2dy}=0$$

Dunque il centro di gravità di un segmento di parabola giace sulla parallela all' asse, condotta pel punto medio della corda che limita il segmento.

V.

Determinare il centro di gravità di un segmento di ellisse.

Sia ABC *(fig. 44)* il segmento dato. Si conduca il diametro GH parallelo alla corda AC; quindi il suo coniugato KL che togliamo ad asse delle x. E mercè l' equazione $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, in cui $a=$KO e $b=$OH, avremo (prendendo gl'integrali tra i limiti $x=a$, $x=x'=$OS, $y=y'=$CS, $y=-y'=$AS)

$$X=\frac{\int_a^{x'}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}xdx}{\int_a^{x'}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a^2-x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{a^2-x'^2}+a^2.arco\ sen\ \frac{x'}{a}},$$

$$Y=\frac{\frac{b}{2a}\int(a^2-x^2)dx}{\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{\frac{1}{2}\int\frac{y^3dy}{(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}}{\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}.$$

Poniamo l' integrale che forma il numeratore dell' ultima fra-

zione sotto la forma $\int y^2 \frac{ydy}{(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$, ed integriamo per parti; avremo

$$\int y^2 \frac{ydy}{(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} = -y^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}},$$

valore che diverrà zero, quando si prenda l'integrale tra i limiti $y = y'$ ed $y = -y'$. Dunque il centro di gravità del segmento giace sul diametro che biseca la corda.

Poniamo che sia g il centro richiesto. Volendone le coordinate gm ed mo rispetto agli assi della figura, chiamiamo φ l'angolo che il diametro KL forma coll' asse maggiore BD dell' ellisse, ed avremo $om = og.cos\varphi$, $gm = og.sen\varphi$; e poichè og è data dal valore di X trovato di sopra, così saranno note om e gm.

IV.

Determinare il centro di gravità di un segmento di cicloide.

Sia mAq *(fig. 35)* il segmento, definito da $y = mq$ ed $x = Aq$. Chiamando a il raggio del circolo generatore e φ il valore angolare dell'arco An, avremo (essendo per la legge di generazione della cicloide $mn = arco.An$)

$$x = a(1 - cos\varphi), \quad y = a(\varphi + sen\varphi).$$

Sarà dunque

1°

$$\int ydx = yx - \int xdy = yx - a^2 \int (1 - cos^2\varphi) d\varphi$$
$$= yx - a^2 \int sen^2\varphi d\varphi.$$

E poichè $sen^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2\varphi$, sostituendo avremo

$$\int sen^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi - \frac{1}{2}\int cos2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} sen2\varphi;$$

quindi

$$\int_o^\varphi ydx = yx - \tfrac{1}{2}a^2(\varphi - \tfrac{1}{2}sen2\varphi)$$

2°

$$\int_o^\varphi yxdx = \tfrac{1}{2}yx^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2dy = \tfrac{1}{2}yx^2 - \tfrac{1}{2}a^3\int(1-cos\varphi)sen^2\varphi d\varphi.$$

Or

$$\int(1-cos\varphi)sen^2\varphi.d\varphi = \int sen^2\varphi.d\varphi - \int cos\varphi sen^2\varphi.d\varphi,$$

dei quali integrali il primo sappiamo già essere $\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}sen2\varphi$; e per ottenere il secondo faremo $sen\varphi = z$; quindi

$$sen^2\varphi = z^2,\ cos\varphi = \sqrt{1-z^2},\ d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Laonde

$$\int cos\varphi sen^2\varphi d\varphi = \int z^2dz = \tfrac{1}{3}sen^3\varphi.$$

Perciò

$$\int_o^\varphi(1-cos\varphi)sen^2\varphi.d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}sen2\varphi - \tfrac{1}{3}sen^3\varphi,$$

e

$$\int_o^\varphi yxdx = \tfrac{1}{2}yx^2 - \tfrac{1}{2}a^3\left[\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}sen2\varphi - \tfrac{1}{3}sen^3\varphi\right]$$

3°

$$\tfrac{1}{2}\int y^2dx = \tfrac{1}{2}y^2x - \int yxdy = \tfrac{1}{2}y^2x - a^3\int(\varphi + sen\varphi)sen^2\varphi d\varphi.$$

Or

$$\int(\varphi + sen\varphi)sen^2\varphi d\varphi = \int\varphi sen^2\varphi d\varphi + \int\varphi sen^2\varphi d\varphi\ ;$$

e rispetto al primo di questi due integrali abbiamo

$$\int\varphi sen^2\varphi d\varphi = \int\varphi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}cos2\varphi)d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\varphi d\varphi - \tfrac{1}{2}\int\varphi cos2\varphi d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{4}\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\int\varphi cos2\varphi d\varphi\ ,$$

Trattando quest' ultimo col metodo d' integrazione per parti, abbiamo

$$\int \varphi cos2\varphi d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi . sen2\varphi - \tfrac{1}{2}\int sen2\varphi d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi sen2\varphi + \tfrac{1}{4} cos2\varphi$$
$$= \varphi sen\varphi cos\varphi + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} sen\varphi .$$

Dunque

$$\int_0^\varphi \varphi sen^2\varphi d\varphi = \tfrac{1}{4}\varphi^2 - \tfrac{1}{2} sen\varphi(\varphi cos\varphi - \tfrac{1}{2} sen\varphi).$$

Rispetto poi a $\int sen^3\varphi d\varphi$, facendo, come sopra, $sen\varphi = z$, abbiamo

$$\int_0^\varphi sen^3\varphi d\varphi = \int z^3 \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} = -z^2\sqrt{1-z^2} - \tfrac{2}{3}(1-z^2)^3$$
$$= (1-cos\varphi) - \tfrac{1}{3}(1-cos^3\varphi).$$

Finalmente riunendo gl' integrali abbiamo

$$\int_0^\varphi y^2 dx = \tfrac{1}{2}y^2 x - a^3\left[\tfrac{1}{4}\varphi^2 - \tfrac{1}{2}sen\varphi(\varphi cos\varphi - \tfrac{1}{2} sen\varphi) + 1 - cos\varphi - \tfrac{1}{3}(1-cos^3\varphi)\right].$$

Or estendendo i tre integrali da $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, avremo

$$\int_0^\pi y dx = \tfrac{3}{2}\pi a^2 , \quad \int_0^\pi yx dx = \tfrac{7}{4}\pi a^3 , \quad \tfrac{1}{2}\int y^2 dx = \tfrac{4}{3}\pi^2 a^3 - \tfrac{4}{3} a^3 ;$$

quindi le coordinate del centro di gravità della semisuperficie cicloidale saranno

$$X = \frac{7}{6} a , \quad Y = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right).$$

E similmente rispetto all' intera superficie si avrà

$$X = \tfrac{7}{6} a , \quad Y = 0.$$

44. Applichiamo ancora le formole del n° 36 alla ricerca

dei centri di gravità delle superficie di rotazione. Sia $y = fx$ l'equazione della curva BC (*fig. 45*) generatrice della data superficie; e prendiamo l'asse di rotazione per quello delle x. Conducendo due piani perpendicolari a questo asse e distanti di dx, essi intercetteranno sulla superficie di rotazione una zona cilindrica, la cui base è un cerchio di raggio y, e l'elemento ds della curva generatrice ne sarà l'altezza. Così la zona cilindrica, che potremo riguardare come elemento della superficie data, sarà espressa da $2\pi y ds$: il suo centro di gravità giacerà evidentemente sull'asse delle x, ed il momento della zona rispetto all'origine, che supponiamo situata nel punto d'intersezione dell'asse colla superficie di rotazione, sarà $2\pi y x ds$. Quindi avremo

$$\int \omega = 2\pi \int y ds, \quad \int \omega x = 2\pi \int y x ds;$$

quindi

$$X = \frac{\int y x ds}{\int y ds}.$$

Esempi.

I.

Determinare il centro di gravità di una zona sferica.

Diciamo a il raggio della circonferenza generatrice: la sua equazione $y^2 = 2ax - x^2$, ci darà $ds = \frac{adx}{y}$. Siano inoltre x' ed x'' le distanze A*t* ed A*s* (*fig. 37*) dei piani determinanti la zona dall'origine A; avremo

$$2\pi \int_{x'}^{x''} y ds = 2\pi a(x'' - x'), \quad 2\pi \int_{x'}^{x''} y x ds = \pi a(x''^2 - x'^2);$$

in conseguenza

$$X = \tfrac{1}{2}(x'' + x').$$

Ma se prendiamo la distanza del centro g di gravità della

zona non dal punto A ma dal punto t in cui il piano della sua base superiore taglia l' asse di rotazione, avremo

$$tg = \tfrac{1}{2}(x''+x') - x' = \tfrac{1}{2}(x''-x');$$

risultamento identico a quello ottenuto nel n° 40.

II.

Determinare il centro di gravità della superficie di un segmento di paraboloide di rivoluzione.

Dall' equazione della parabola generatrice $y^2 = 2px$ si deduce $ds = dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$; quindi

$$2\pi\int yds = 2\pi\sqrt{2p}\int dx\sqrt{x+\frac{p}{2}} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{2p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$2\pi\int yxds = 2\pi\sqrt{2p}\int xdx\sqrt{x+\frac{p}{2}} = 2\pi\sqrt{2p}\left[\frac{2}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C;$$

quindi

$$X = \frac{\frac{1}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C}{\frac{2}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C}.$$

III.

Determinare il centro di gravità della superficie generata dall' arco di cicloide Ams *(fig. 35) che gira intorno all' asse* Ac.

Dall' equazione della cicloide $dy = dx\sqrt{\frac{a}{x}-1}$, si ottiene $ds = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}$, ed in conseguenza $s = 2\sqrt{2ax}$.

Quindi

$$\int yds = ys - \int sdy = 2y\sqrt{2ax} - 2\sqrt{2a}\int dx\sqrt{2a-x}$$
$$= 2y\sqrt{2ax} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2a}(2a-x)^{\frac{3}{2}} + C;$$

ed estendendo gl' integrali da $x=0$ ad $x=2a$, avremo pel primo limite $y=0$, e pel secondo $y=\pi a$. Perciò

$$\int_0^{2a} yds = 4\pi a^2 - \tfrac{4}{3}(2a)^2.$$

Similmente

$$\int yxds = \int y\sqrt{2ax}.dx = \frac{2}{3}y\sqrt{2ax^3} - \frac{2}{3}\sqrt{2a}\int xdx\sqrt{2a-x};$$

ed

$$\int xdx\sqrt{2a-x} = -\frac{2}{3}x(2a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int(2a-x)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= -\frac{2}{3}x(2a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(2a-x)^{\frac{5}{2}};$$

quindi sostituendo avremo

$$\int yxds = \frac{2}{3}y\sqrt{2ax^3} + \frac{4}{9}x\sqrt{2a}(2a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{45}\sqrt{2a}(2a-x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Ed estendendo gl' integrali tra gli stessi limiti di sopra, otterremo

$$\int_0^{2a} yxds = \frac{8}{3}\left[\pi a^3 - \frac{1}{15}(2a)^3\right].$$

Quindi

$$X = \frac{\int yxds}{\int yds} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}}\,a.$$

45. Finalmente applicando le formole generali del n° 36

alla ricerca dei centri di gravità dei solidi, il cui elemento di volume viene espresso da $dxdydz$, avremo

$$\begin{aligned} \int \omega &= \int\int\int dxdydz \\ \int \omega\, x &= \int\int\int xdxdydz \\ \int \omega\, y &= \int\int\int ydydxdz \\ \int \omega\, z &= \int\int\int zdydxdz\,; \end{aligned}$$

quindi

$$X = \frac{\int\int\int xdxdydz}{\int\int\int dxdydz}\,,\quad Y = \frac{\int\int\int ydydxdz}{\int\int\int dydxdz}\,,$$

$$Z = \frac{\int\int\int zdxdydz}{\int\int\int dydxdz}\,.$$

Prendiamo ad esempio la ricerca del centro di gravità di un ottante sferico. Poichè l'equazione della sfera $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$ ci dimostra che ponendo costanti x ed y, i limiti estremi di z sono, nell'ipotesi da noi fatta, $z = 0$, e $z = z' = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; avremo

$$\int_0^{z'}\int\int xdxdydz = \int\int xdxdy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

E se in questo ultimo integrale poniamo x costante, *zero* ed $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$ saranno i limiti di y. Ma

$$\int dy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{a^2 - x^2}{2}\,\text{arco sen}\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

ed in conseguenza

$$\int_0^{y'} dy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{\pi}{4}(a^2 - x^2);$$

perciò sostituendo, ed estendendo l'integrale da $x = 0$ ad $x = a$, avremo

$$\int_0^a\int_0^{y'} xdx\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^a xdx(a^2 - x^2) = \frac{\pi}{16}a^4.$$

Similmente si avrà

$$\int_o^a\int_o^{y'}\int_o^{z'} dxdydz = \int_o^a\int_o^{y'} dxdy\sqrt{a^2-x^2-y^2} = \frac{\pi}{4}\int_o^a dx(a^2-x^2) = \frac{\pi}{6}a^3.$$

Quindi

$$X = \frac{\int\int\int xdxdydz}{\int\int\int dxdydz} = \frac{3}{8}a.$$

Un calcolo analogo darà

$$Y = Z = \frac{3}{8}a.$$

E se gl'integrali fossero estesi tra i limiti $x = -a$ ed $x = a$, $y = -y'$ ed $y = y'$, si avrebbe pel centro di gravità dell' emisfero

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = \frac{3}{8}a.$$

46. Quando il solido abbia un asse di simmetria, vale a dire una retta che sia luogo geometrico dei centri di gravità di un certo sistema di sezioni parellele, allora sarà facile ridurre ad integrali semplici gl' integrali tripli del n° precedente. Ed in vero prendendo ad asse delle x la retta che passa pei centri di gravità del sistema di sezioni definito dalla legge di simmetria, ed a queste sia parallelo il piano delle yz, è chiaro che $\int\int dydz$ disegnerà l'area di ciascuna sezione, la quale in conseguenza della figura del solido, sarà una funzione dell' ascissa che ne determina il sito. Potremo così ad $\int\int dydz$ sostituire la funzione fx determinata dalla definizione geometrica del solido ; e gl' integrali necessari alla determinazione del centro di gravità si ridurranno alle due forme generali

$$\int \omega = \int fx.dx\text{, ed } \int \omega x = \int fx.xdx.$$

Così la legge di simmetria richiedendo che nei solidi di ro-

tazione ogni sezione, fatta da piano perpendicolare all'asse, debba essere un cerchio, il cui raggio si confonde con un' ordinata della curva che limita la superficie generatrice del solido; ne segue che disegnando con $y = \varphi x$ l'equazione di essa curva, la funzione fx, che dovrà esprimere l'area della sezione, sarà $\pi(\varphi x)^2$. Quindi la posizione del centro di gravità sull' asse di rotazione sarà data dall' equazione

$$X = \frac{\int (\varphi x)^2 x dx}{\int (\varphi x)^2 dx}$$

Poniamo per esempio che si voglia il centro di gravità di un segmento sferico. Essendo $y = \sqrt{2ax - x^2}$ l'equazione della curva che limita il semicircolo generatore della sfera, avremo $(\varphi x)^2 = 2ax - x^2$; quindi

$$X = \frac{\int_0^{x'} (2ax - x^2) x dx}{\int_0^{x'} (2ax - x^2) dx} = x' \cdot \frac{8a - 3x'}{12a - 4x'}.$$

Ed estendendo gl' integrali da $x = 0$ ad $x = a$, avremo il centro di gravità dell' emisfero definito dall' equazione

$$X = \frac{5}{8} a.$$

La stessa formola generale qui sopra esposta ci darà per un segmento di ellissoide di rotazione lo stesso valore di X che abbiamo trovato pel segmento sferico. Quanto al paraboloide consimile avremo

$$X = \frac{2}{3} x;$$

ed

$$X = x' \frac{8a + 3x'}{12a + 4x'}$$

del caso di un' iperboloide di rotazione.

47. Vi ha però dei solidi, in cui l'esistenza di un asse di simmetria non è veduta immediatamente come in quelli di rotazione, ma si deduce dai teoremi riguardanti la figura del solido. Prendiamo ad esempio la piramide triangolare ABCD (*fig.* 46), nella quale parallelamente alla base supponiamo fatta la sezione svh. Congiungiamo il vertice A col centro g di gravità della base; e poichè questo punto giace ai due terzi della Cm che unisce il vertice C col punto medio m di BD, il piano AmC taglierà anche la sv in due parti eguali nel punto t; ed il centro di gravità della sezione svh giacerà sulla th intersecata in n dalla retta Ag. Or dalla simiglianza dei triangoli AmC Ath, ed AgC Anh abbiamo

$$gC : mC = nh : th;$$

ma $gC = \frac{2}{3}mC$, dunque $nh = \frac{2}{3}th$; e la retta Ag passerà pei centri di gravità di tutte le sezioni parallele alla base. Sarà dunque Ag asse di simmetria; e facendo $An = x$, $Ag = a$, $BDC = B$, $svh = K$, avremo

$$B : K = a^2 : x^2, \text{ donda } K = \frac{Bx^2}{a^2}.$$

Sostituito questo valore di fx nella funzione che assegna l'ascissa del centro, avremo

$$X = \frac{\int_0^a x^2 . x dx}{\int_0^a x^2 dx} = \frac{3}{4} a.$$

E la stessa legge di simmetria avendo luogo per una piramide qualunque e per qualsivoglia cono, segue che i centri di gravità di questi solidi stanno ai tre quarti della retta che ne congiunge il vertice col centro di gravità della base.

48. Mercè la conoscenza del centro di gravità di una piramide si perviene facilmente alla determinazione del centro di gravità di un settore sferico. Sia OBC (*fig. 47*) il settore circolare generatore del settore sferico OBCD. Essendo questo solido decomponibile in piramidi infinitamente sottili aventi in O un vertice comune, e le basi sugli elementi di superficie della calotta BCD; ne segue che i centri di gravità degli elementi piramidali giaceranno sulla calotta *tsh* descritta col raggio $Ol = \frac{3}{4}OB$. Basterà dunque determinare il centro di gravità della calotta *tsh* per avere quello del settore sferico OBCD. Or il centro di gravità della calotta *tsh* giacendo nel punto medio *z* della freccia $st = \frac{3}{4}Cm = \frac{3}{4}x'$, ed essendo $os = \frac{3}{4}OC = \frac{3}{4}a$; ne segue che la distanza Oz del centro di gravità del settore da quello della sfera sarà

$$X = \frac{3}{4}(a - \tfrac{1}{2}x').$$

49. Conoscendo il centro di gravità di un arco di curva o di una superficie piana, si può facilmente ottenere l'area della superficie generata dalla rotazione della curva, o il volume del solido generato dalla rotazione della superficie. Ed in vero conosciamo che l'ordinata del centro di gravità di un arco di curva è dato dall'equazione (n° 37)

$$Y = \frac{\int y ds}{s},$$

e quella del centro di gravità di una superficie piana viene espressa (n° 42) da

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx}.$$

Moltiplichiamo ciascuna di queste due equazioni pel denominatore del 2° membro e per 2π, ed avremo

$$2\pi Y.s = 2\pi\int y ds\ ,\ \ 2\pi Y.\int y dx = \pi\int y^2 dx.$$

Or sappiamo che $2\pi\int yds$ esprime l'area della superficie di rotazione generata dall'arco s, e $\pi\int y^2dx$ il volume del solido, di cui è generatrice la superficie $\int ydx$. Sarà dunque l'area della superficie di rotazione eguale a $2\pi Y.s$, vale a dire al prodotto dell'arco generatore moltiplicato per la circonferenza descritta dal suo centro di gravità; e $2\pi Y.\int ydx$, prodotto della superficie generatrice per la circonferenza descritta dal suo centro di gravità, disegnerà il volume del solido di rotazione.

Applichiamo primieramente alla misura della superficie sferica questo metodo, conosciuto sotto il nome di *teorema di Guldin*, quantunque fosse stato già noto al celebre Pappo.

Sappiamo (n° 38) che il centro di gravità di un arco di cerchio è sul raggio che lo biseca, e che la sua distanza Y dal centro è data dall'equazione

$$Y=\frac{a.c}{s}.$$

Ma pel caso di una semicirconferenza abbiamo $c=2a$, $s=\pi a$; quindi

$$Y=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

In conseguenza avremo

$$2\pi Y.s=4a.\pi a=4\pi a^2,$$

vale a dire il noto teorema che dimostra la superficie sferica esser quadrupla di quella del cerchio massimo.

II.

Abbiamo trovato (n° 38) l'ordinata del centro di gravità di un arco di cicloide espressa da

$$Y=y+\frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2a-x)^{\frac{3}{2}}-(2a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Applicando questa formola all'intero arco As (*fig.* 35) avremo $y = \pi a$, $x = 2a$; quindi

$$Y = a\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

E l' arco $s = 2\sqrt{2ax}$ divenendo nella stessa ipotesi $= 4a$, avremo che

$$2\pi Y.s = 8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$$

esprimerà l'area della superficie generata dall' arco cicloidale As rotando intorno all' asse Ae.

III.

Sia ABC (*fig.* 48) un cono retto a base circolare. Il centro s di gravità del triangolo generatore ABo giace ai due terzi della retta Bn che biseca la base Ao. Sarà dunque $st = \frac{2}{3}\, no = \frac{1}{3}$ Ao. Facendo A$o = r$, e B$o = a$, avremo il triangolo AB$o = \frac{1}{2}\, br$; quindi

$$2\pi Y.\int y dx = \frac{2}{3}\,\pi r.\tfrac{1}{2}br = \tfrac{1}{3}\pi r^2 b,$$

come dalla Geometria.

IV.

Immaginiamo il cerchio $abcd$ (*fig.* 49) girare intorno all' asse mn, giacente nel suo piano. Sarà così generato un anello a sezione circolare, il cui volume, essendo o il centro di gravità della superficie generatrice, sarà

$$V = \pi a^2.2\pi b = 4\pi^2 a^2 b,$$

disegnando a il raggio ob, e b la distanza oh.

E se in vece dell'intero cerchio girasse il semicerchio abc, allora essendo $\frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}$ la distanza del suo centro g di gravità

dal diametro ac, che si suppone parallelo ad mn, la circonferenza descritta da esso centro sarebbe $2\pi\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}+b\right)$, e

$$V=2\pi^2 a^2\left(\frac{4a}{3\pi}+b\right)$$

n' esprimerebbe il volume. Al quale aggiungendo il volume $2\pi b^2 a$ del cilindro $acve$ si avrà quello di un solido denominato *toro*.

50. Sappiamo che l' equilibrio di più forze comunque dirette nello spazio ed agenti sopra uno stesso punto, richiede (n° 17) che siano soddisfatte le tre equazioni

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0.$$

Or $\Sigma P\cos\alpha$, $\Sigma P\cos\beta$, $\Sigma P\cos\gamma$ rappresentano ancora la somma delle distanze dei punti estremi delle rette rappresentanti le forze dai piani yz, xz, xy; e se a questi punti estremi immaginiamo applicati dei pesi eguali, i loro momenti rispetto agli stessi piani coordinati saranno nulli, perchè rappresentati da $m\Sigma P\cos\alpha$, $m\Sigma P\cos\beta$, $m\Sigma P\cos\gamma$: il centro di gravità dunque di tutte quelle masse eguali si confonderà col punto di comune applicazione di quelle forze.

E viceversa se un punto dello spazio, preso ad origine di tre piani coordinati, sia centro di gravità di un sistema di pesi eguali, avremo $m\Sigma\, l\cos\alpha=0$, $m\Sigma\, l\cos\beta=0$, $m\Sigma\, l\cos\gamma=0$, l indicando la distanza del centro di gravità di ciascun peso dal centro dell' intero sistema. Laonde.

I.

Se più forze si equilibrano intorno ad un punto, sarà questo il centro di gravità di altrettanti pesi eguali, situati nei punti estremi delle rette che rappresentano intensità e direzioni delle forze.

Reciprocamente: *se dal centro di gravità di un sistema*

di pesi eguali si tirino altrettante rette ai centri delle singole masse, le forze rappresentate in grandezza e direzione da queste rette si faranno equilibrio intorno a quel punto.

Or tenendo dietro ai principî della composizione delle forze parallele si trova facilmente che il centro di gravità di un triangolo è ancora centro di gravità di tre pesi eguali applicati ai suoi tre vertici. Perciò tre forze, le cui grandezze e direzioni siano rappresentate dalle tre rette che uniscono il centro di gravità di un triangolo coi vertici, staranno in equilibrio. Ed in vero essendo g (*fig.* 50) il centro di gravità del triangolo abc, e quindi ga, gb, gc le grandezze e direzioni delle tre forze applicate in g, decomponiamo ga nelle due gs e go, e similmente gc in gh e go. Le due gs e gh si equilibreranno perchè eguali ed opposte, e rimarranno le due go che dirette nel medesimo senso si comporranno nell' unica forza $2go$. Ma la forza $gb = 2go$; dunque le tre forze ga, gb, gc staranno necessariamente in equilibrio.

Reciprocamente, se tre forze si fanno equilibrio intorno ad un punto, sarà questo il centro di gravità del triangolo definito dalle tre congiungenti i punti estremi delle rette che rappresentano in grandezza e direzione le tre forze date.

E mercè gli stessi principî sarà facile ancora di trovare che il centro di gravità di una piramide triangolare lo è ancora di quattro masse eguali applicate ai suoi vertici. In conseguenza quattro forze rappresentate in grandezza e direzione dalle congiungenti il centro di gravità coi vertici di una piramide triangolare, staranno in equilibrio; e viceversa.

Questo teorema, del pari che quello relativo al triangolo, ammette una semplicissima dimostrazione diretta. Sia ABCD (*fig.* 51) la piramide triangolare, e g il suo centro di gravità che sappiamo giacere ai tre quarti della retta che congiunge il vertice A col centro o di gravità della base: saranno gA, gB, gC, gD le grandezze e direzioni delle forze

considerate nel teorema. Si completino i parallelogrammi su i triangoli goB, goC, goD ; ed avremo nel punto g applicate tre forze rispettivamente eguali e parallele alle tre rette oB, oC, oD, e tre altre eguali a go e dirette nel medesimo senso. Le prime tre, come identiche a quelle applicate al centro di gravità del triangolo BCD, staranno in equilibrio ; e le tre rimanenti forze go composte nella loro risultante $3go$, saranno equilibrate dall'opposta forza $gA = 3go$.

Ed in generale un sistema continuo di punti materiali, animato da forze dirette verso il centro di gravità del sistema e proporzionali alle distanze per cui ne sono separati i loro punti di applicazione, starà in equilibrio. Così ponendo la terra sferica ed omogenea, e la gravità reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze dal centro, Newton ha dimostrato [1] che ogni molecola situata nell'interno del nostro pianeta gravita verso il suo centro una forza proporzionale alla distanza di cui n'è separata. Quindi pel teorema, ch'esponiamo, tutte queste forze resterebbero equilibrate intorno al punto di comune applicazione, e la terra non avrebbe tendenza al moto in virtù delle mutue attrazioni delle sue molecole.

II.

La risultante di M *forze che agiscono sopra un punto* A, *passerà pel centro di gravità* G *di* M *pesi eguali applicati ai punti estremi delle rette che rappresentano le* M *forze ; e la retta che dovrà disegnarne il valore, sarà* M *volte maggiore della distanza* AG.

Imperocchè, applicando al punto A una forza eguale ed opposta alla risultante delle M forze date, avremo $M+1$ forze che si equilibreranno intorno al punto A : questo punto sarà dunque il centro di gravità di $M+1$ pesi eguali applicati ai punti estremi delle rette rappresentanti le $M+1$ for-

[1] Vedi la mia Fisica — *tomo* I. *pag.* 85.

ze. Or essendo A il centro di gravità degli $M+1$ pesi, e quello del peso $(M+1)^{esimo}$ essendo sulla direzione della risultante delle M forze, il centro di gravità dei rimanenti M pesi dovrà stare sulla stessa retta.

Inoltre sia A (*fig.* 52) il punto di comune applicazione delle M forze, AK la forza eguale ed opposta alla risultante delle M forze date, e quindi K il sito del centro di gravità del peso $(M+1)^{esimo}$. Poichè A è il centro di gravità di tutti gli $M+1$ pesi eguali, e G quello dei primi M, dovrà aver luogo la proporzione

$$AG : AK = 1 : M,$$

donde

$$AK = M.AG.$$

La risultante dunque delle M forze passa pel centro di gravità degli M pesi, e la retta, che deve rappresentarla, è M volte maggiore della distanza che separa il punto di comune applicazione A dal centro G degli M pesi eguali.

Da questo teorema risulta

— 1° Che immaginando un corpo, le cui molecole si attraessero con forze proporzionali alle loro mutue distanze, esse molecole peserebbero verso il loro comune centro di gravità con forze proporzionali alle distanze di cui ne sarebbero separate. Prendendo le reciproche distanze delle molecole per rappresentare le loro mutue tendenze, è chiaro che ciascuna di esse sarà sottoposta ad una quantità di azione $M-1$ volte più grande della distanza che la separa dal centro di gravità delle $M-1$ molecole rimanenti, ossia M volte più grande della distanza che la separa dal centro di gravità dell' intero sistema. Quindi nell' ipotesi di una tal legge di attrazione i corpi tenderebbero gli uni verso degli altri, come se le loro masse si fossero ristrette nei loro centri di gravità; e così questo risultamento che nel sistema newtoniano ha luogo soltanto per le sfere omogenee o almeno com-

poste di strati sferici omogenei, nell' ipotesi poi di un'attrazione proporzionale alle distanze avrebbe luogo per ogni corpo, qualunque ne fosse la figura o l'ordinamento molecolare. — 2° Che volendo determinare il centro di gravità di M pesi eguali, comunque disposti, basterà congiungere i loro centri con un punto qualunque A dello spazio; costruire la risultante delle forze rappresentate dalle M congiungenti; ed in fine nel punto determinato dalla sua M^a parte a contare da A, si troverà il centro richiesto.

Or facendo variare di posizione quel punto A, varieranno in grandezza e direzione le M congiungenti, ma la risultante delle forze da esse rappresentate passerà costantemente pel centro di gravità del sistema. Questo punto dunque non solamente è centro di forze parallele eguali e dirette nel medesimo senso, ma lo è eziandio di tutti i sistemi di forze che partendo da un certo sistema di molecole fossero convergenti verso un qualsivoglia punto dello spazio, e proporzionali alle distanze delle molecole da questo punto.

Quindi se un corpo, di cui sia fisso il centro di gravità, sia sottoposto all'azione di un simile sistema di forze convergenti, esso starà in equilibrio comunque si faccia girare intorno al suo centro di gravità, poichè per questo punto passerà sempre la risultante di quelle date forze convergenti. È questo nel sistema newtoniano il caso di un corpo situato nell' interno della terra, poichè le sue molecole pesano verso il centro di essa con forze proporzionali alle distanze per le quali ne sono separate. E se ammettiamo lo stesso risultamento pei corpi situati fuori della terra, ciò non è di rigore geometrico, poichè le parti più vicine al suolo sono attratte con forza maggiore delle più lontane; ma la differenza è così piccola che riesce insensibile nel fatto. Così un cilindro retto omogeneo, rigorosamente parlando non potrebbe equilibrarsi intorno al suo centro di gravità, se non avendo l'asse verticale ovvero orizzontale; ed intanto l'esperimento dimostra che vi rimane in equilibrio in ogni altra posizione.

III.

Se un sistema invariabile di pesi si muova nello spazio conservando costante la distanza del suo centro di gravità da un punto fisso, sarà ancora costante la somma dei prodotti dei pesi pei quadrati delle distanze da quel dato punto.

Abbiamo veduto nel n° 21 che tra le intensità le mutue inclinazioni e la risultante di un sistema di forze concorrenti ad un punto esiste la relazione

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP' cos\,(PP').$$

Ciò posto chiamando m, m', m'' ec. i pesi del sistema, r, r', r'' ec. le distanze dei loro centri di gravità dal punto fisso, egli è chiaro pel teorema precedente che se fosse $m = m' = m'' =$ ec. la risultante delle forze rappresentate dalle rette r, r', r'' ec. passerebbe pel centro di gravità del sistema, e sarebbe rappresentata da MR, M disegnando il numero dei pesi ed R la distanza del centro di gravità del sistema dal punto fisso. Ma potremo estendere lo stesso teorema al caso dei pesi diseguali, se in vece della massa m consideriamo m masse eguali all' unità e riunite nel loro centro di gravità; e così in vece delle forze r, r', r'' ec. dovremo considerare le forze mr, $m'r'$, $m''r''$ ec. Quindi avremo

$$\Sigma P^2 = \Sigma m^2 r^2,\ \ \Sigma PP' cos(PP') = \Sigma mm'rr'.cos(rr'),$$

ed

$$M = m + m' + m'' + \text{ec.}$$

e l'equazione del n° 21 diverrà

$$M^2 R^2 = \Sigma m^2 r^2 + 2\Sigma mm'rr' cos\,(rr').$$

Ma chiamando α la distanza dei centri di gravità di due pesi

m ed m', avremo per un noto teorema di Geometria

$$2rr'\cos(rr') = r^2 + r'^2 - \alpha^2 ;$$

e perciò sostituendo si avrà

$$\begin{aligned} M^2R^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \ldots \\ + mm'(r^2 + r'^2 - \alpha^2) + \text{ec.} \\ + mm''(r^2 + r''^2 - \alpha_1^2) + \text{ec.} \\ \text{ec.} \end{aligned}$$

Nella quale espressione osserviamo che r^2 si trova moltiplicato per $m^2 + mm' + mm'' +$ ec., ossia per $m(m + m' + m'' + \cdot\cdot)$ $= Mm$; similmente r'^2 è moltiplicato per Mm', r''^2 per Mm'' ec. Quindi l'equazione precedente riceverà la forma

$$M^2R^2 = M\Sigma mr^2 - \Sigma mm'\alpha^2 .$$

Or se R ed α sono costanti, lo sarà ancora Σmr^2 ; ed in ciò consiste il teorema.

Dalla stessa equazione abbiamo ancora

$$M\Sigma mr^2 = \Sigma mm'\alpha^2 + M^2R^2 ,$$

donde si rileva che Σmr^2 sarà un *minimo*, quando sia $R = 0$; vale a dire che

In un sistema di corpi la somma dei prodotti dei loro pesi pei quadrati delle distanze dei loro centri di gravità da quello dell' intero sistema è più piccola che per qualsivoglia altro punto dello spazio.

In fine supponendo i pesi del sistema tutti eguali, avremo

$$M = m + m' + m'' + \ldots = Nm ;$$

quindi

$$M^2R^2 = N^2R^2m^2, \quad M\Sigma mr^2 = Nm^2\Sigma r^2, \quad \Sigma mm'\alpha^2 = m^2\Sigma\alpha^2 ;$$

e l'equazione diverrà nel caso di $R=0$

$$N\Sigma r^2 = \Sigma \alpha^2.$$

Or il centro di gravità di un triangolo è ancora centro di gravità di tre masse eguali applicate ai suoi vertici. Perciò chiamando a, b, c i tre lati, r r' r'' le distanze del suo centro di gravità dai tre vertici; l'ultima equazione ci darà

$$a^2+b^2+c^2=3(r^2+r'^2+r''^2);$$

vale a dire che: *la somma dei quadrati dei tre lati di un triangolo è eguale a 3 volte la somma dei quadrati delle distanze dei vertici dal centro di gravità.*

Similmente si dimostrerebbe ancora che: *la somma dei quadrati dei sei spigoli di una piramide triangolare è eguale a 4 volte la somma dei quadrati delle distanze dei vertici dal centro di gravità della piramide.*

CAPO QUINTO.

Composizione delle forze agenti sopra un sistema invariabile di punti, e comunque dirette nello spazio.

Condizione di equilibrio di più forze agenti in un medesimo piano — Determinazione della risultante, quando nessuna delle equazioni di equilibrio è soddisfatta — Caso in cui la risultante passa per l'origine — Caso della riduzione ad una coppia: equazione di condizione per la riducibilità di tutte le forze ad una sola — Condizioni di equilibrio delle forze comunque agenti nello spazio — Condizione della loro riducibilità ad una sola — Espressione analitica di una tal condizione — Possibilità d'infiniti sistemi di due forze agenti in piani diversi, che siano equivalenti ad un dato sistema di forze irriducibili ad una sola — Conseguenze delle diverse ipotesi che si possono fare sulle sei equazioni di equilibrio — Risultamenti che se ne ottengono nell'ipotesi di un cangiamento di assi coordinati — Indipendenza delle condizioni di equilibrio dalla diversa inclinazione degli assi — Riduzione del loro numero nel caso di uno o più punti fissi; e calcolo delle pressioni che questi soffriranno.

51. Cominciando dall'esaminare il caso più semplice, supporremo le direzioni delle forze giacer tutte in un medesimo piano, nel quale immaginiamo condotti due assi comunque inclinati *yy*, *xx* (*fig. 53*). Sia P una delle forze date, e *b* il suo punto di applicazione. Facendo agire sull'origine A le due forze opposte P_{r}, $-P_{r}$ eguali e parallele a P, questa non verrà turbata nella sua azione, poichè le due forze introdotte si equilibrano a vicenda: così avremo in vece di P la forza P_{r} ad essa eguale e similmente diretta, e la coppia $P, -P_{r}$. Ed operando nello stesso modo sulle rimanenti forze, ne otterremo un sistema equivalente al dato, e composto di due altri sistemi; l'uno di forze applicate all'origine rispettivamente eguali alle date e similmente dirette, e l'altro di coppie che giacenti in un medesimo piano si comporranno in una coppia risultante rappresentata dalla somma algebrica dei loro momenti. Quindi le forze date non potran-

no essere in equilibrio, senza che siano nulle ad un tempo la risultante delle forze applicate in A e la somma algebrica dei momenti delle coppie; vale a dire che dovranno esser soddisfatte le tre equazioni (n.i 17 e 33)

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \; \Sigma P \cos\beta = 0, \; \Sigma P p = 0, \; (a)$$

chiamando p la distanza Ab della direzione della forza dall'origine A. Delle quali equazioni le due prime dimostrano che il poligono delle forze applicate all'origine dev'esser chiuso. In conseguenza se le forze date soddisfano a questa condizione geometrica, esse saranno in equilibrio, ovvero si ridurranno ad una coppia, secondochè la terza equazione sarà o no soddisfatta.

52. Il momento risultante di più forze agenti in un piano dovendo pareggiar sempre la somma algebrica dei momenti componenti, ed il momento di una coppia essendo lo stesso per tutt'i punti del suo piano, ne segue

— 1° Che se più forze agenti in un piano si riducono ad una coppia, il momento del loro sistema avrà un valore costante per qualsivoglia punto del piano; e viceversa.

— 2° Che se le forze sono in equilibrio, il momento del loro sistema sarà nullo per qualsivoglia punto del piano; e viceversa.

— 3° Che se le forze ammetteranno una risultate, il momento del sistema sarà vario da un punto all'altro del piano, e nullo per tutti i punti che giaceranno sulla direzione della risultante; nè potrà riuscire identico per tre punti che non siano in linea retta. Laonde se la somma algebrica dei momenti delle forze non è la stessa per tre punti del piano non giacenti in linea retta, le forze saranno riducibili ad una sola, la cui grandezza e direzione si potrà determinare per mezzo dei tre momenti dati. Siano A, B, C (*fig.* 57) i tre punti dati; (A), (B), (C) i rispettivi momenti; e poniamo che GL, che incontra la BC in L, sia la direzione della risultante. Essendo i momenti (B) e (C) propor-

zionali alle perpendicolari Bm e Cn, e queste proporzionali a BL e CL; ne segue che prendendo sulla BC il punto L tale che si abbia

$$BL : CL = (B) : (C) ,$$

il punto L apparterrà alla direzione della risultante. E prendendo sulla AC il punto H in modo che si abbia

$$CH : AH = (C) : (A) ,$$

il punto H apparterrà ancora alla direzione della risultante. Ne avremo così definito la direzione GL, la quale renderà soddisfatta la proporzione

$$AG : BG = (A) : (B) ;$$

e l'equazione $X.As = (A)$ ne farà determinare la grandezza.

Or se moltiplichiamo tra loro le tre proporzioni precedenti, avremo il noto teorema di Carnot sulla trasversale di un triangolo

$$BL.CH.AG = CL.AH.BG ;$$

vale a dire che dei sei segmenti, determinati dalla trasversale, il prodotto di tre non aventi estremità comune pareggerà il prodotto degli altri tre che neppure avranno estremità comune.

— 4° Immaginiamo che più forze agenti in un piano siano rappresentate in grandezza e direzione da altrettante rette, i cui punti estremi siano congiunti con un punto qualunque del piano. Avremo così un certo numero di triangoli che avranno un vertice comune, e per le basi le rette rappresentanti le forze. Or essendo il valore numerico della superficie di ciascuno dei triangoli metà di quello che indica il momento della forza la cui espressione grafica gli serve di base, ne segue che la somma algebrica dei triangoli sarà nulla, di valore costante, o infine variabile da un punto all'altro del piano, secondochè le forze saranno in equi-

librio, si ridurranno ad una coppia, o si comporranno in unica risultante.

— 5° Sia AB...E (*fig. 58*) un poligono, nel cui piano sia preso ad arbitrio un punto M. Congiungendo questo punto coi vertici del poligono, avremo che la sua superficie sarà espressa dalla somma algebrica dei triangoli

$$MAB+MBC+MCB-MAE-MED.$$

Or se i lati del poligono rappresentano in grandezza e direzione altrettante forze agenti in un piano, queste (essendo il poligono chiuso) dovranno essere in equilibrio, ovvero ridursi ad una coppia, il cui momento dovendo avere un valore numerico doppio di quello che risulterà dalla somma algebrica dei triangoli, sarà anche doppio di quello che indicherà l'area del poligono. Quindi il bel teorema di Möbius: *se due poligoni piani sono equivalenti in superficie, due sistemi di forze che fossero rappresentate in grandezza e direzione dai lati dei due poligoni, sarebbero ancora equivalenti.*

53. Rispetto alle tre equazioni di condizione (a) è purtuttavia da osservarsi che se le due prime sono funzioni immediate di quantità date nel problema, non è lo stesso della terza, poichè le p, quantunque determinabili per mezzo delle note direzioni delle forze e coordinate dei punti di applicazione, non sono purtuttavia date immediatamente. Or perchè la terza equazione partecipasse del carattere comune alle due prime, supporremo ognuna delle forze P (*fig. 54*) decomposta in due, l'una parallela all'asse delle x, l'altra a quello delle y. Così chiamando θ l'angolo degli assi, X ed Y le componenti ad esse parallele, avremo

$$X=P\frac{sen\,\beta}{sen\,\theta},\quad Y=P\frac{sen\,\alpha}{sen\,\theta},$$

ed in vece della coppia P,—P, avremo le due X,—X ed Y,—Y. E supponendo che la forza P faccia coll' asse delle x

positive l'angolo $\alpha<\theta$, le sue componenti X ed Y saranno positive; e positivo sarà ancora il momento $X.as = Xy\,sen\,\theta$; ma il momento $Y.ah = Yx\,sen\,\theta$ sarà negativo, poichè tende a far rotare da destra a sinistra (n° 32). Sarà dunque il momento della coppia risultante eguale alla differenza dei momenti delle coppie componenti, e perciò avremo

$$(Xy - Yx)sen\theta = P(y.sen\beta - x.sen\alpha).$$

Or pel piede b dell'ordinata ab conduciamo bc parallela alla direzione della forza P, e be ad essa perpendicolare, e dall'origine A meniamo Ac perpendicolare a bc. Avremo così $Ac = x.sen\alpha$, $be = y.sen\beta$. Ma Am rappresenta p nel momento Pp; dunque

$$P(ysen\beta - xsen\alpha) = -Pp.$$

Ed in vero la forza P, come è rappresentata nella figura, non può avere che un momento negativo — Nella *fig. 55* poi il momento $P(ysen\beta - xsen\alpha)$ risulta positivo, e tale ancora è quello della forza P rappresentato da $P.Am$ — Se poi la direzione della forza facesse colle x positive un angolo $\alpha>\theta$ e $<180°+\theta$, sarebbe (*fig. 56*) negativo l'angolo β e quindi il suo seno, ed il momento della coppia risultante sarebbe

$$-P(ysen\beta + xsen\alpha) = -Pp,$$

poichè $p = Am = Ac + be = xsen\alpha + ysen\beta$ — Ed in generale si avrà sempre che il momento della coppia risultante delle due $X, -X$ ed $Y, -Y$ pareggerà il momento Pp della forza P. Potremo dunque a ΣPp sostituir sempre $\Sigma P(ysen\beta - xsen\alpha)$.

Essendo $\theta = 90°$, sarà $sen\beta = cos\alpha$ e $cos\beta = sen\alpha$: le due espressioni $\Sigma Pcos\alpha$ e $\Sigma Pcos\beta$, che allora esprimeranno le somme delle componenti secondo gli assi, diverranno $\Sigma Pcos\alpha$ e $\Sigma Psen\alpha$; e l'espressione della somma dei momenti

diverrà $\Sigma P(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$. Così le tre equazioni di equilibrio saranno

$$\Sigma P\cos\alpha = 0\,,\ \Sigma P\sin\alpha = 0\,,\ \Sigma P(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0. \quad (b)$$

54. Supponiamo che veruna delle equazioni (b) sia soddisfatta, allora il sistema delle forze si comporrà in una risultante R. Ed in vero la risultante delle forze applicate all' origine delle coordinate, eguali alle date e similmente dirette, non potendo esser nulla senza che si abbia $\Sigma P\cos\alpha = 0$ e $\Sigma P\sin\alpha = 0$; essa risultante dovrà avere, finchè queste due equazioni non sono soddisfatte, un valore finito Q. E questa forza, giacendo nello stesso piano della coppia risultante di tutte le coppie X,—X ed Y,—Y, vi si potrà sempre comporre in una forza sola.

Or non essendo nulle $\Sigma P\cos\alpha$ e $\Sigma P\sin\alpha$, facciamo $\Sigma P\cos\alpha = X$ e $\Sigma P\sin\alpha = Y$, e chiamiamo a l'angolo che la risultante R farà colla x positive: saranno $R\cos a$ ed $R\sin a$ le sue componenti secondo gli assi. Quindi se alle somme X ed Y delle componenti di tutte le forze secondo gli assi aggiungiamo rispettivamente $-R\cos a$ e $-R\sin a$, componenti secondo gli stessi assi della forza $-R$ che ridurrà il sistema all' equilibrio, avremo

$$X - R\cos a = 0\,,\ Y - R\sin a = 0\,;$$

donde

$$R\cos a = X\,,\ R\sin a = Y\,,\ R = \sqrt{X^2 + Y^2}\,,\ \text{e}\ \tan a = \frac{Y}{X}.$$

Questi valori di R e dell' angolo a ch' essa forma coll' asse delle ascisse, convengono ancora alla determinazione della risultante delle forze applicate all' origine. Sarà dunque questa risultante eguale e parallela a quella che cerchiamo; donde segue

—1° Che movendo nel loro piano parallelamente a se medesime le forze di un sistema, la loro risultante conserverà

invariato il suo valore e la sua inclinazione ad una retta data.

— 2° Che la risultante richiesta sarà compiutamente definita, quando avremo conosciuto un punto qualunque della sua direzione. Chiamiamo x' ed y' le coordinate di questo punto; e poniamo $\Sigma P(y.cos\alpha - x.sen\alpha) = G$. Indicando con r la distanza dell'origine dalla direzione della risultante, avremo

$$Rr = Xy' - Yx';$$

ma

$$Rr = \Sigma P(y cos\alpha - x sen\alpha) = G;$$

dunque

$$G = Xy' - Yx';$$

donde

$$y' = \frac{Y}{X}x' + \frac{G}{X},$$

che sarà l'equazione della retta, secondo la quale agirà la risultante. Or se in quest'ultima equazione diamo un valore arbitrario ad x', y' sarà definita ed avremo un punto della direzione della risultante.

Se poi delle tre equazioni (b) fosse soddisfatta l'ultima soltanto, vale a dire che si avesse $G = 0$; l'equazione della risultante diverrebbe

$$y' = \frac{Y}{X}x',$$

ed essa passerebbe per l'origine. E se in fine fossero soddisfatte le sole due equazioni $\Sigma P cos\alpha = 0$ e $\Sigma P sen\alpha = 0$, le forze date si ridurrebbero ad una coppia, il cui momento G sarebbe definito dall'espressione $\Sigma P(y.cos\alpha - x.sen\alpha)$.

In conseguenza più forze agenti in un piano si potranno sempre comporre in una sola, quando le loro direzioni ed intensità rendano soddisfatta la condizione

$$(\Sigma P cos\alpha)^2 + (\Sigma P sen\alpha)^2 > 0;$$

poichè essa esprime che $\Sigma P cos\alpha$ e $\Sigma P sen\alpha$ non sono entram-

be nulle, e perciò non può esservi nè equilibrio, nè riduzione ad una coppia.

55. Or passiamo a considerare le forze comunque dirette nello spazio, e le cui direzioni e punti di applicazione rapporteremo per maggior semplicità di calcolo ad assi coordinati rettangolari. Sia P (*fig. 59*) una delle forze date, la quale faccia cogli assi delle x, y, z positive gli angoli α, β, γ; ed x, y, z siano le coordinate del punto a di ap-applicazione. Immaginiamo la forza P decomposta nelle tre X, Y, Z parallele ai tre assi, le quali essendo rappresentate dai tre spigoli di un parallelepipedo rettangolare di cui P è diagonale, saranno date dalle tre equazioni

$$X = P\cos\alpha\,,\ Y = P\cos\beta,\ Z = P\cos\gamma.$$

Immaginiamo ancora applicate all'origine e secondo l'asse delle x le due forze opposte X' ed X'' eguali alla componente X; similmente nel senso delle Y le due altre Y' ed Y'' eguali ad Y, e nel senso delle z le due Z' e Z'' eguali a Z. È chiaro che l'introduzione di queste nuove forze, che a vicenda si distruggono, lasciando inalterata l'azione della forza P, vi sostituisce le tre componenti X', Y', Z' applicate all'origine, eguali alle componenti X, Y, Z e similmente dirette, e le tre coppie X,—X'', Y,—Y'', Z,—Z'' applicate ai punti estremi della retta Aa.

E poichè una forza può considerarsi come applicata ad un punto qualunque della sua direzione, noi supporremo la Z (*fig. 60*) applicata al punto c, in cui la sua direzione incontra il piano delle xy: così Ac sarà il braccio di leva della coppia Z,—Z'', e Z.Ac ne sarà il momento. Ma (n° 32 — teor. III) il momento di una coppia si può riguardare come risultante di due momenti che in grandezza siano rappresentati dai due lati di un parallelogrammo, di cui il momento dato disegni la diagonale; potremo dunque al momento Z.Ac sostituire i due momenti Z.Ab e Z.Ah, vale a dire Zx e Zy.

Supponendo ancora la componente X applicata al punto c' *(fig. 61)* in cui la sua direzione incontra il piano delle zy, al suo momento $X.Ac'$ potremo sostituire i due $X.Ab'$ ed $X.Ah'$; vale a dire Xy e Xz. Ed in fine immaginando applicata la componente Y nell'incontro c'' *(fig. 62)* della sua direzione col piano delle zx, avremo i due momenti $Y.Ab''$ ed $Y.Ah''$, ossia Yz ed Yx, equivalenti al momento $Y.Ac''$.

Agiranno così nel piano delle yx i due momenti Yx ed Xy, il primo dei quali (n° 32) sarà positivo, e negativo il secondo. In conseguenza essi si comporranno (n° 33) nell'unico momento $Yx—Xy$. Similmente si troverà nel piano delle zx agire il momento $Xz—Zx$, ed il momento $Zy—Yz$ nel piano delle yz.

Operando la stessa decomposizione su ciascuna delle forze date, ne otterremo due sistemi, l'uno di forze applicate all'origine, eguali alle componenti delle date e similmente dirette, l'altro costituito da tre gruppi di coppie giacenti nei tre piani coordinati. Chiamando X, Y, Z le somme delle componenti il primo sistema, ne potremo determinare la risultante mercè le equazioni (n° 19)

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\ \cos a=\frac{X}{R},\ \cos b=\frac{Y}{R},\ \cos c=\frac{Z}{R};$$

e le tre somme algebriche dei momenti delle coppie contenute nei tre piani coordinati si comporranno in un momento G definito in grandezza e direzione (n° 33 — teor. III) dalle equazioni

$$G=\sqrt{L^2+M^2+N^2},\ \cos\alpha=\frac{L}{G},\ \cos\beta=\frac{M}{G},\ \cos\gamma=\frac{N}{G}.$$

In conseguenza tutte le forze agenti sopra un sistema invariabile di punti e comunque dirette nello spazio, si potranno sempre ridurre ad una forza applicata all'origine, e ad una coppia. E poichè una coppia non può essere equilibrata da una forza, così il sistema delle forze date non potrà

essere in equilibrio senza che si abbia $R=0$ e $G=0$. Ma perchè queste due equazioni siano soddisfatte, dovranno esserlo ancora le seguenti

$$\left.\begin{array}{l} X=0\,,\ Y=0\,,\ Z=0\,, \\ L=0\,,\ M=0\,,\ N=0. \end{array}\right\} (c)$$

Delle quali sei equazioni le prime tre dichiarano impossibile il moto di traslazione del corpo in cui risiede il sistema dei punti di applicazione delle forze, le altre tre assicurano non poter avvenire movimento di rotazione; quindi le prime si dicono *equazioni dell' equilibrio di traslazione*, e le seconde *equazioni dell' equilibrio di rotazione.*

56. Se poniamo che niuna delle equazioni (c) sia soddisfatta, l' equilibrio delle forze non avrà luogo; ma non potremo dedurne ch' esse si debbano necessariamente comporre in una sola risultante, vale a dire che sia sempre possibile ridurre all' equilibrio il sistema dei punti di applicazione mercè l' opposizione di una sola forza. Ed in vero abbiamo veduto come tutte le forze del sistema si possano comporre in una coppia ed una forza applicata all' origine: or se la direzione di questa forza sia parallela al piano della coppia, movendo questo piano parallelamente a se stesso, potremo (n° 33 — teor. I) ridurlo a combaciamento colla direzione di quell' unica forza, senza che l' azione del sistema ne rimanga alterata; ed allora è chiaro come la coppia e la risultante applicata all' origine si possano sempre comporre in una forza sola. Ma se la direzione di quella risultante fosse inclinata al piano della coppia, noi la supporremo protratta fino ad incontrarlo; e pel teor. I del n° 33 comprendiamo come questo punto d' incontro possa divenir sempre punto di applicazione di uno degli elementi della coppia. Avremo così due forze agenti sopra un punto, e la cui risultante non avrà comune col piano della coppia che il solo punto d' incontro. Questa risultante dunque e l' altro e-

lemento della coppia, che sono due forze agenti in due piani diversi, rappresenteranno l'ultima riduzione del sistema.

Rimane ora a vedere se due forze agenti in piani diversi possano comporsi in una sola. Poniamo che ciò sia possibile: dovrà essere ancora possibile l'esistenza di una terza forza che equilibri l'azione delle due non giacenti nel medesimo piano; ed in conseguenza la somma dei loro momenti potrà, dietro una certa direzione e grandezza della terza forza, risultare nulla per un asse qualunque. Ma non essendo le due forze date in un medesimo piano, sarà impossibile determinare la direzione di una terza forza in modo che tutte tre siano incontrate da una retta qualunque; e perciò riguardando questa retta come asse, la somma dei momenti delle tre forze non sarà nulla, e perciò esse non saranno in equilibrio. Ma una forza non può fare equilibrio ad un sistema di forze senza essere eguale ed opposta alla risultante del sistema; dunque due forze giacenti in piani diversi, non potendo essere equilibrate da una terza, non possono comporsi in una sola [1].

[1] Se due forze agenti in piani diversi sono irriducibili ad una sola, non potremo in generale dire altrettanto di tre forze, le quali non siano nè parallele nè concorrenti ad un punto. Rappresentino P, Q, R *(fig. 63)* tre forze, di cui due comunque prese non siano in un medesimo piano. Sulla direzione di una delle forze, su quella di R per esempio, si prenda un punto A, al quale s' intendano applicate le forze p',—p' eguali e parallele a P, e q',—q' eguali e parallele a Q. Avremo così le due forze p' e q' che si comporranno nella risultante V, e le due coppie P,—p' e Q,—q' le quali daranno una coppia risultante che indichiamo con S,—S. Or essendo per ipotesi P e Q in due piani differenti, la forza V dovrà fare un angolo col piano della coppia S,—S, poichè in contrario V ed S,—S si potrebbero comporre in una sola che sarebbe risultante di P e Q, ciò ch'è assurdo. Quindi componendo V colla forza R si potrà ottenere una risultante che si trovi giacere nel piano della coppia S,—S; ed allora le tre forze saranno riducibili ad una sola.

Tutto ciò suppone che il piano della coppia S,—S non contenga la direzione di R. Ma se questa forza vi giacesse in vece, essa dovrebbe esser diretta secondo l'intersezione del piano della coppie

Dunque: *più forze comunque dirette nello spazio saranno sempre riducibili ad una sola, o almeno a due agenti in piani diversi.*

57. Per determinare la condizione analitica necessaria e sufficiente all' esistenza di un' unica risultante, noi supporremo che le equazioni (c) non essendo soddisfatte, il sistema delle forze si riduca realmente ad una sola che chiamiamo R; della quale essendo a, b, c gli angoli d' inclinazione agli assi, le sue componenti ad essi parallele saranno $R\cos a$, $R\cos b$, $R\cos c$. Or se in tale ipotesi s' introducesse nel sistema la forza $-R$, vale a dire una forza eguale ed opposta alla risultante R, è chiaro che il sistema sarebbe ridotto all' equilibrio. Ma se la risultante R forma cogli assi gli angoli a, b, c, la sua opposta vi farà gli angoli $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$; quindi le componenti della nuova forza parallele agli assi, saranno $-R\cos a$, $-R\cos b$, $-R\cos c$. Basterà dunque introdurre queste ultime espressioni nelle sei equazioni (c), perchè esse siano soddisfatte. Le tre prime ci daranno

$$X-R\cos a=0,\ Y-R\cos b=0,\ Z-R\cos c=0,$$

donde

$$R\cos a=X,\ R\cos b=Y,\ R\cos c=Z;$$

ed in conseguenza, dovendo essere $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1$, sarà

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\ \cos a=\frac{X}{R},\ \cos b=\frac{Y}{R},\ \cos c=\frac{Z}{R};$$

$S,-S$ col piano RAV; ed allora la risultante di R e V non potrebbe trovarsi nel piano della coppia $S,-S$ senza supporre $R=\infty$. E ciò avverrebbe costantemente se P ed R da una parte, e Q ed R dall' altra giacessero in un medesimo piano, mentre P e Q sono in piani differenti; poichè allora R giacerebbe nel piano della coppia $P,-p'$ ed in quello di $Q,-q'$; quindi nella loro intersezione, e perciò nel piano della coppia risultante.

Dunque, perchè tre forze non parallele nè concorrenti ad un punto, siano irriducibili ad una sola, è necessario che due di esse soltanto siano in piani diversi.

vale a dire che la risultante del sistema sarà eguale e parallela a quella delle forze applicate all'origine, ciò che d'altronde sarebbe risultato dalla stessa decomposizione delle forze.

La risultante sarebbe dunque interamente definita, se fosse noto un punto della sua direzione. Chiamiamo x, y, z le coordinate di questo punto, a cui possiamo immaginare applicate le componenti $-R\cos a$, $-R\cos b$, $-R\cos c$ della forza introdotta per equilibrare il sistema. Quindi se le componenti X, Y, Z della risultante R hanno prodotto i momenti

$$Zy-Yz=L\,,\quad Xz-Zx=M,\quad Yx-Xy=N\,,$$

le componenti della forza $-R$, ossia $-R\cos a=-X$, $-R\cos b=-Y$, $-R\cos c=-Z$ dovranno produrre i momenti

$$-(Zy-Yz)\,,\quad -(Xz-Zx)\,,\quad -(Yx-Xy).$$

Perciò l'addizione di questi termini ai primi membri delle tre ultime equazioni (c) dovrà renderle soddisfatte, ed avremo

$$L-(Zy-Yz)=0,\quad M-(Xz-Zx)=0,\quad N-(Yx-Xy)=0.\quad (d)$$

Or egli è chiaro che se una retta forma con tre assi coordinati rettangolari gli angoli a, b, c definiti dalle equazioni

$$\cos a=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\quad \cos b=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,,\quad \cos c=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

le sue proiezioni sui piani delle zy, zx ed xy faranno cogli assi delle y, z ed x degli angoli le cui tangenti saranno $\frac{Z}{Y}$, $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{X}$. Dunque le tre equazioni (d) rappresentano le tre proiezioni di una retta, la quale passa pel punto (x, y, z) preso sulla direzione della risultante del sistema,

ed è parallela alla risultante delle forze applicate all'origine; vale a dire che le equazioni (d) rappresentano le tre proiezioni della risultante richiesta sui tre piani coordinati. Ma se esse son tali, dovranno ancora soddisfare alla condizione che da due qualunque di esse si possa dedurre la terza; e quindi i valori di x, y, z, restando definiti da due sole equazioni, dovranno necessariamente presentarsi sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Ciò posto, moltiplicando per X la 1ª delle equazioni (d), la 2ª per Y, ed addizionandone i prodotti, avremo

$$LX+MY+ZYx-ZXy=0,$$

la quale combinata colla 3ª, a fine di eliminarne y, ci darà

$$LX+MY+MZ-(ZY-ZY)x=0,$$

donde

$$x=\frac{LX+MY+NZ}{0}.$$

Dunque si avrà $x=\frac{0}{0}$, e lo stesso avverrà delle altre due coordinate, quando sia soddisfatta l'equazione

$$LX+MY+NZ=0. \quad (e)$$

Ecco la relazione che deve esistere tra le quantità L, M, N, X, Y, Z date dalle sei equazioni (c) nel caso che nessuna di esse sia soddisfatta, affinchè le equazioni (d) siano quelle della risultante, vale a dire, affinchè le forze date siano riducibili ad una sola.

Or l'equazione (e) non è che traduzione in algoritmo della condizione geometrica, che nel nº precedente abbiamo trovato necessaria per la riducibilità di un sistema di forze ad una sola risultante. Ed in vero abbiamo ivi veduto che più forze non si possono comporre in una sola, se la risultante

di quelle applicate all'origine non sia parallela al piano della coppia risultante, vale a dire, se l'asse di questa coppia non faccia angolo retto con quella risultante. Chiamiamo a, b, c gli angoli che forma cogli assi la risultante delle forze applicate all'origine, ed a_1, b_1, c_1, quelli che vi forma l'asse della coppia risultante; l'inclinazione rettangolare delle due linee richiederà che sia soddisfatta la nota equazione

$$\cos a.\cos a_1+\cos b.\cos b_1+\cos c.\cos c_1=0,$$

la quale si trasformerà immediatamente nell'equazione (e), quando ai coseni siano sostituiti i loro valori dati nei numeri 19, e 33 teo. III color. IV.

58. Nel caso poi che l'equazione (e) non sia soddisfatta, sappiamo (n° 56) che l'intero sistema di forze si ridurrà ad una forza ed una coppia, e quindi a due forze giacenti in piani diversi. Siano di una di queste due forze X_1, Y_1, Z_1 le componenti parallele agli assi, ed X_2, Y_2, Z_2 le analoghe componenti dell'altra; siano ancora x_1, y_1 e z_1 le coordinate di un punto preso sulla direzione della prima forza, ed x_2, y_2 e z_2 le coordinate di un punto della seconda; ed in fine chiamiamo A, B, C le somme delle componenti delle forze date, prese nel senso degli assi delle x, y, z. Così per determinare le grandezze e posizioni delle due risultanti alle quali è riducibile il sistema delle forze date, avremo le equazioni

$$\begin{aligned}
A&=X_1+X_2\ , & L&=Z_1y_1-Y_1z_1+Z_2y_2-Y_2z_2\\
B&=Y_1+Y_2\ , & M&=X_1z_1-Z_1x_1+X_2z_2-Z_2x_2\\
C&=Z_1+Z_2\ , & N&=Y_1x_1-X_1y_1+Y_2x_2-X_2y_2.
\end{aligned}$$

Ecco sei equazioni per determinare dodici incognite; può dunque il problema esser risoluto d'infinite maniere, o sia che vi saranno infiniti sistemi di due forze giacenti in piani diversi, che potranno essere equivalenti al sistema delle forze date. Potremo in conseguenza dar valori arbitrari a sei incognite per determinare le altre sei. Ma le sei incognite arbitrarie non

potranno scegliersi tutte tra le componenti delle due forze, nè tutte tra le coordinate dei due punti incogniti; imperocchè le tre equazioni a sinistra ci dimostrano che prese ad ad arbitrio X_1, Y_1 e Z_1 saranno determinate X_2, Y_2 e Z_2. E rispetto alle coordinate dei due punti osserviamo che moltiplicando ordinatamente le tre equazioni a destra prima per x_1, y_1, z_1 indi per x_2, y_2, z_2, e poi addizionando le due serie di prodotti si ottiene

$$Lx_1+My_1+Nz_1=X_2(y_1z_2-y_2z_1)+Y_2(z_1x_2-z_2x_1)+Z_2(x_1y_2-x_2y_1)$$
$$Lx_2+My_2+Nz_2=X_1(y_2z_1-y_1z_2)+Y_1(z_2x_1-z_1x_2)+Z_1(x_2y_1-x_1y_2)$$

Or ponendo in queste equazioni $A-X_2$, $B-Y_2$, $C-Z_2$ in vece di X_1, Y_1, Z_1 e poi sottraendo dalla 2ª la 1ª abbiamo

$$L(x_2-x_1)+M(y_2-y_1)+N(z_2-z_1)=A(y_2z_1-y_1z_2)+B(z_2x_1-z_1x_2)+C(x_2y_1-x_1y_2).$$

Dalla quale equazione si rileva che le coordinate dei due punti non possono essere tutte arbitrarie.

L' indeterminazione del problema messa in chiaro da questo calcolo, risulta ancora dalla costruzione seguita per determinare la risultante delle forze date. Ed in vero dopo aver ottenuto la risultante R delle forze applicate all'origine ed il momento G risultante delle tre somme di momenti L, M, N, la necessità della riduzione a due forze giacenti in piani diversi deriva dall' essere la direzione di R non parallela al piano del momento G. Vi sarà dunque incontro della direzione di R col piano di G; e potendo riguardare questo punto d' incontro come uno degli estremi del braccio di leva di G, avremo una risultante R' dalla composizione di R con una delle forze di G, l' altra lasciando necessariamente in un piano che non conterrà R'. E poichè senz' alterare l' azione di G, il suo piano può muoversi parallelamente a se stesso, ed in ogni posizione di questo piano la coppia può comunque girare in esso; ed ivi assumere infiniti bracci di leva, ne segue la possibilità delle varie grandezze e posizioni di R' e dell' altro elemento della coppia;

le quali varie grandezze e posizioni son purtuttavia tali, che definite per una delle due forze, restano determinate anche per l'altra. E perciò avviene che le sei incognite arbitrarie non possono appartener tutte nè alla classe delle componenti, nè a quella delle coordinate.

59. Finora abbiamo supposto che nessuna delle equazioni (*e*) fosse soddisfatta: poniamo in vece che talune di esse lo siano.

—1.° Sia $X=0$: la risultante delle forze applicate all'origine giacerà nel piano delle zy. E poichè la risultante del sistema dev' esserle parallela, essa ancora sarà perpendicolare all' asse delle x, e quindi la x di ogni suo punto sarà costante. Ma nell'ipotesi di $X=0$ le tre ultime equazioni (*c*) divengono

$$L-(Zy-Yz)=0\,,\; M+Zx=0\,,\; N-Yx=0;$$

donde

$$x=-\frac{M}{Z}=\frac{N}{Y}.$$

Dunque, perchè x sia costante, si richiede che sia soddisfatta l'equazione

$$MY+NZ=0,$$

la quale non è che l'equazione (*e*) dopo avervi fatto $X=0$.

Osserviamo ancora che Y e Z sono le componenti delle proiezioni delle forze sul piano delle zy, e che $R=\sqrt{Y^2+Z^2}$ (nell'ipotesi di $X=0$) è la proiezione della risultante del sistema sullo stesso piano delle yz. Dunque: *proiettando un sistema di forze sopra un piano qualunque, la proiezione della risultante sarà ancora risultante delle forze rappresentate dalle proiezioni di quelle del sistema.*

— 2.° Siano $X=0$ ed $Y=0$; sarà Z la risultante delle forze applicate all' origine. La risultante richiesta sarà dunque perpendicolare al piano delle xy, e perciò avrà costanti la x ed y di ogni suo punto: in tale ipotesi le tre

equazioni (c) diverranno

$$L - Zy = 0 \, , \; M + Zx = 0 \, , \; N = 0.$$

Le due prime ci danno

$$y = \frac{L}{Z} \, , \; x = -\frac{M}{Z} \, ;$$

l'ultima poi esprime la condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di una risultante unica, poichè essendo $N = 0$, sarà $\cos c_1 = 0$; vale a dire che l'asse della coppia risultante sarà perpendicolare a quello delle z, e quindi il piano di essa coppia sarà parallelo alla risultante Z delle forze applicate all'origine.

Poichè Z è nel tempo stesso proiezione di R sull'asse delle z, e somma algebrica delle proiezioni delle componenti sul medesimo asse; è chiaro che il teorema esposto al n° precedente ha luogo ancora nel caso della proiezione di un sistema di forze sopra una retta qualunque.

— **3.°** Siano $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$; sarà $R = 0$, ed il sistema si ridurrà ad una coppia, definita in grandezza e direzione dai valori di L, M ed N.

— **4.°** Siano finalmente $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$; le tre ultime equazioni (c) diverranno

$$Zy - Yz = 0 \, , \; Xz - Zx = 0 \, , \; Yx - Xy = 0 \, ;$$

la risultante passerà dunque per l'origine. Ed in vero equilibrandosi tutte le coppie nascenti dalla decomposizione delle forze, rimarranno le sole componenti applicate all'origine, che sarà necessariamente punto di applicazione della risultante. Da ciò poi deriva il seguente teorema di Statica. *Se più forze, applicate ad un sistema di punti, sono in equilibrio, lo sarebbero ancora se movendosi parallelamente a loro stesse concorressero in un medesimo punto.*

60. Di un sistema di forze comunque agenti nello spazio

siano X, Y, Z le somme delle componenti parallele a trè assi rettangolari dati; e la risultante R del sistema faccia cogli assi gli angoli a, b, c. Se immaginiamo le direzioni delle stesse forze riferiti a tre nuovi assi rettangolari che facciano coi primi gli angoli $\alpha\, \beta\, \gamma$, $\alpha'\, \beta'\, \gamma'$, $\alpha''\, \beta''\, \gamma''$, e chiamiamo V, V', V'' gli angoli che la direzione di R farà coi nuovi assi, avremo

$$\cos V = \cos a . \cos\alpha + \cos b . \cos\beta + \cos c . \cos\gamma$$
$$\cos V' = \cos a . \cos\alpha' + \cos b . \cos\beta' + \cos c . \cos\gamma'$$
$$\cos V'' = \cos a . \cos\alpha'' + \cos b . \cos\beta'' + \cos c . \cos\gamma'';$$

nelle quali equazioni introducendo il fattore R, e poi sostituendo X, Y, Z ad $R\cos a$, $R\cos b$, $R\cos c$, otterremo

$$R\cos V = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$$
$$R\cos V' = X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma'$$
$$R\cos V'' = X\cos\alpha'' + Y\cos\beta'' + Z\cos\gamma''.$$

Quindi essendo $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, saranno ancora

$$R\cos V = 0,\ R\cos V' = 0,\ R\cos V'' = 0;$$

vale a dire che essendo nulle le somme delle componenti di un sistema di forze secondo tre assi rettangolari dati, esse risulteranno nulle per ogni altro sistema di simili assi.

Conservando la stessa ipotesi chiamiamo L, M, N le somme dei momenti delle forze rispetto ai tre assi rettangolari dati, e G il momento risultante: i momenti componenti di G rispetto ai nuovi assi saranno

$$G\cos V = L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma$$
$$G\cos V' = L\cos\alpha' + M\cos\beta' + N\cos\gamma'$$
$$G\cos V'' = L\cos\alpha'' + M\cos\beta'' + N\cos\gamma''.$$

Perciò essendo $L=0$, $M=0$, $N=0$; saranno ancora

$$G\cos V = 0,\ G\cos V = 0,\ G\cos V' = 0;$$

dunque se i momenti delle forze sono nulli rispetto a tre assi rettangolari dati, nulli resteranno comunque il sistema degli assi giri intorno alla sua origine. Ed in vero, sappiamo che essendo $L=0$, $M=0$, $N=0$, le forze si comporranno in una sola che passerà per l'origine: dovrà dunque questo punto appartenere sempre alla risultante, comunque gli assi rettangolari siano diretti nello spazio. Ma la risultante non può passare per l'origine, se i momenti delle forze non sono nulli; dunque riusciti eguali a zero per un certo sistema di assi rettangolari, dovranno rimaner nulli in tutte le possibili posizioni del sistema intorno alla prima origine.

Ma se gli assi movendosi parallelamente a loro stessi convergessero in un'altra origine; allora chiamandone a, b, c le coordinate, quelle dei punti di applicazione delle forze diverrebbero $x-a$, $y-b$, $z-c$; ed indicando l, m, n i momenti delle forze rispetto ai nuovi assi, avremmo

$$l=\Sigma P\Big[cos\gamma(y-b)-cos\beta(z-c)\Big]=L+c\Sigma Pcos\beta-b\Sigma Pcos\gamma,$$

$$m=\Sigma P\Big[cos\alpha(z-c)-cos\gamma(x-a)\Big]=M+a\Sigma Pcos\gamma-c\Sigma Pcos\alpha,$$

$$n=\Sigma P\Big[cos\beta(x-a)-cos\alpha(y-b)\Big]=N+b\Sigma Pcos\alpha-a\Sigma Pcos\beta.$$

Or se pei primi assi si aveva $\Sigma Pcos\alpha=0$, $\Sigma Pcos\beta=0$ e $\Sigma Pcos\gamma=0$, queste medesime relazioni dovranno aver luogo pei secondi perchè paralleli ai primi; ed allora saranuo

$$l=L,\ m=M,\ n=N.$$

Risultamento che si doveva necessariamente attendere, poichè essendo nulle le componenti parallele agli assi senza esser nulli i momenti, le forze nella loro decomposizione non hanno potuto dare che sistemi di coppie in piani paralleli a quelli delle coordinate. Or l'effetto di una coppia resta inalterato, quando il suo piano si muove parallelamente a se

stesso ; e perciò nel movimento dell' origine senza cangiamento nella direzione degli assi i momenti delle coppie debbono necessariamente rimanere invariati.

Poniamo in fine che essendo $L=0$, $M=0$, $N=0$, non siano nulle le somme $\Sigma P\cos\alpha$, $\Sigma P\cos\beta$, $\Sigma P\cos\gamma$: otterremo

$$l = c\Sigma P\cos\beta - b\Sigma P\cos\gamma\,,$$
$$m = a\Sigma P\cos\gamma - c\Sigma P\cos\alpha\,,$$
$$n = b\Sigma P\cos\alpha - a\Sigma P\cos\beta\,;$$

le quali equazioni daranno valori infiniti per a, b e c, finchè non sia soddisfatta la condizione

$$l\Sigma P\cos\alpha + m\Sigma P\cos\beta + n\Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Ed in vero l'esser nulle le somme dei momenti rispetto ai primi assi dimostra la riduzione delle forze ad una sola che passa per l' origine; e non potendo questo risultamento dipendere dalla diversa giacitura del sistema coordinato , le somme dei momenti e quelle delle componenti rispetto ai nuovi assi dovranno necessariamente soddisfare all' equazione di condizione che assicura l' unità della risultante.

61. Le condizioni , che abbiamo trovato necessarie all'equilibrio di un sistema di forze applicate ad un sistema di punti, non sono proprie degli assi rettangolari ma comuni a tutti i sistemi di assi coordinati. Ed in vero abbiano gli assi un' inclinazione qualunque , potremo sempre sostituire ad ogni forza una coppia , ed una forza eguale alla data, similmente diretta ed applicata all' origine. Avremo così due sistemi, l' uno di coppie e l'altro di forze applicate all' origine ; i quali non potendosi equilibrare a vicenda , è d' uopo che ciascuno lo sia da se medesimo. Or le forze applicate all' origine saranno sempre riducibili a tre dirette secondo gli assi , e finchè queste non siano individualmente nulle daranno una risultante espressa in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre ret-

te che le rappresentano. Quindi chiamando X, Y, Z le tre componenti secondo gli assi ed R la loro risultante, è chiaro che non si avrà $R=0$, finchè non siano

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0.$$

Rispetto poi ai momenti delle coppie, essi non riceveranno altra modificazione nel passare da assi rettangolari ad obbliqui, che quella di essere moltiplicati per un fattore costante. Dapoichè se gli assi sono abbliqui, e siano α, β, γ gli angoli formati da quelli delle yx, yz e zx, avremo che i momenti delle forze Z ed Y saranno $Zy sen\beta$ ed $Yz sen\beta$; similmente quelli delle Z ed X saranno $Zx sen\gamma$ ed $Xz sen\gamma$, e similmente $Yx sen\alpha$ ed $Xy sen\alpha$ esprimeranno i momenti delle X ed Y. Quindi

$$L=sen\beta\Sigma(Zy-Yz),\ M=sen\gamma\Sigma(Zx-Xz),\ N=sen\alpha\Sigma(Yx-Xy).$$

Ma il momento G risultante di L, M ed N non potendo esser nullo, senza che siano $L=0$, $M=0$, $N=0$; dunque per l'equilibrio delle coppie dovrà esser soddisfatto il sistema di equazione

$$\Sigma(Zy-Yz)=0,\ \Sigma(Zx-Xz)=0,\ \Sigma(Yx-Xy)=0;$$

qualunque sia la mutua inclinazione degli assi.

62. Finora abbiamo supposto che il sistema dei punti di applicazione delle forze fosse interamente libero. Ma se vi fosse in vece un punto fisso, è chiaro che il moto di traslazione del sistema sarebbe impossibile, finchè la resistenza del punto non sia minore di $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, ch' esprime l'azione delle forze nella produzione del moto di traslazione. Ma $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ è il valore della risultante, nel caso che le forze del sistema ne abbiano una; dunque il punto fisso soffrirà la stessa pressione che avrebbe ricevuto dall' azione delle forze se vi fossero state immediatamente applicate.

Rispetto poi all' influenza delle coppie nascenti dalla ridu-

zione delle forze all' origine, osserviamo che rimanendo costante la loro azione, ovunque siano esse trasportate nei loro piani o in piani paralleli, noi supporremo che le tre coppie i cui momenti sono

$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,,\ \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,,\ \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)$$

si muovano nei loro piani coordinati in modo che i punti medi dei loro bracci di leva coincidano coll' origine. Così si pone in evidenza che esse non potranno tenere il corpo in equilibrio intorno al punto fisso, se le tre somme di momenti non siano individualmente nulle, vale a dire se non siano soddisfatte le tre equazioni

$$L = 0\,,\ M = 0\,,\ N = 0.$$

Laonde le condizioni necessarie all' equilibrio di rotazione saranno sempre le stesse, sia che il sistema dei punti di applicazione si trovi perfettamente libero, sia che presenti un punto fisso.

Supponiamo ancora che tra i punti del sistema ve ne siano due fissi: allora prendendo la retta che li congiunge per uno degli assi coordinati, e poniamo quello delle x, è chiaro che l' unico movimento possibile nel sistema sia quello di rotazione intorno all' asse che congiunge i due punti fissi; e perciò l'equilibrio avrà luogo, quando sia soddisfatta l' unica equazione

$$L = 0.$$

Per determinare poi le pressioni sofferte dai due punti, che supponiamo A e B (*fig. 64*), prendiamo A per origine e chiamiamo x, y, z le componenti della pressione prodottavi, ed x', y', z' le componenti di quella sofferta da B. Siano inoltre X, Y, Z le somme delle forze parallele agli assi e ridotte all'origine A, alla quale supponiamo ancora trasportate le componenti x', y', z' della pressione che risulta pel punto B. In questa riduzione la componente x' può,

senza l'introduzione di veruna coppia, immaginarsi applicata immediatamente al punto A che giace sulla sua direzione; ma le componenti Y' e Z' non potranno esser trasportate in A senza dar origine a due coppie, la prima delle quali (indicando con a la distanza AB) avrà il momento $Y'a$, e la seconda il momento $-Z'a$. E poichè l'esistenza dei due punti fissi sull'asse delle x distrugge sì le componenti trasportate all'origine che i momenti delle coppie che tendono a far girare il sistema dei punti di applicazione intorno agli assi delle y e delle z; così avremo le equazioni

$$X = X + X', \quad Y = Y + Y', \quad Z = Z + Z',$$
$$M = -Z'a, \quad N = Y'a;$$

per mezzo delle quali possiamo determinare le cinque incognite $X + X'$, Y, Z, Y', Z'. E necessariamente dobbiamo riguardaro le due pressioni X ed X' nella loro somma, poichè son due forze che agiscono nella stessa direzione.

Ma se il sistema in vece di presentare due punti immobili, fosse ligato ad un asse semplicemente poggiato su i punti A e B quindi mobile lungo la retta AB, allora l'equilibrio del sistema richiederebbe soddisfatte le due equazioni

$$L = 0, \quad X = 0;$$

e le quattro incognite Y, Z, Y', Z' sarebbero determinate mercè le quattro equazioni

$$Y = Y + Y', \quad Z = Z + Z', \quad M = -Z'a, \quad N = Y'a.$$

Se in vece di due punti fissi il sistema ne presentasse tre, tutte le sei equazioni di equilibrio sarebbero soddisfatte. Ma se volessimo definire la pressione sofferta da ciascun punto, il problema risulterebbe indeterminato, poichè immaginando ciascuna pressione decomposta in tre, parallele ai tre assi, avremmo nove componenti incognite in sei equazioni.

Poniamo in fine che il sistema in vece di avere tre punti fissi, poggiasse con tre punti contro un piano, che sceglia-mo per quello delle x, y. È chiaro che l'equilibrio del sistema sarebbe impossibile, se non fossero nulle le componenti delle forze parallele a questo piano, e nullo il momento di rotazione intorno all' asse delle z. Perciò dovranno esser soddisfatte le tre equazioni

$$X=0\,,\ Y=0\,,\ N=0\,;$$

ed in conseguenza sarà soddisfatta ancora l' equazione

$$LX+MY+NZ=0\,,$$

necessaria (n° 57) per la riducibilità delle forze ad una sola. Laonde l' equilibrio del corpo sarebbe impossibile se le forze, da cui è animato, non avessero risultante unica.

Or essendo $X=0$ ed $Y=0$, sarà $Z=R$; quindi la risultante delle forze dovrà essere normale al piano. E perciò chiamando z_1, z_2, z_3 le pressioni fatte su i tre punti A, B e C, avremo

$$R=z_1+z_2+z_3.$$

E per ottenere sotto la forma più semplice le altre due equazioni necessarie alla determinazione di queste tre incognite, prendiamo il punto A per origine, e la congiungente AB come asse delle x. Saranno x_2 e 0 le coordinate di B, ed x_3, y_3 quelle di C; quindi (n° 55)

$$L=z_3y_3\,,\ M=-z_2x_2-z_3x_3.$$

Risulterebbe poi indeterminato [1] il problema, se i punti

[1] L' indeterminazione algoritmica di questo ed altri simili problemi meccanici, mentre ogni ragion vuole che in realtà siano determinati, ha fatto gran senso ai geometri che han tolto a considerarli. Ed in vero, allorchè un corpo preme contro un piano resistente toccandolo con più di tre punti, la parte di pressione che

di contatto del corpo col piano fossero più di tre. Purtuttavia prendendo successivamente ad asse delle x le rette che

toccherà a ciascuno di essi, sarà necessariamente definita, poichè sarebbe assurdo supporre che il valore di essa parte potesse dipendere dal nostro arbitrio; ed intanto le leggi dell' algoritmo ci obbligano a riguardare il problema come idoneo ad ammettere un' infinita serie di soluzioni. In questa divergenza dei risultamenti matematici dai suggerimenti del buon senso D'Alembert vedeva una imperfezione della scienza delle forze. Purtuttavia Poinsot (Vedi il n° 128 della 9ª edizione della sua Statica) ha creduto poter assolvere la scienza da quest' accusa d'imperfezione, rimettendosi all' impossibilità di attuare il fatto nel senso rigoroso del concetto matematico, vale a dire di un contatto tra corpi perfettamente rigidi. Ma perchè questa difesa avesse tutto il valore che l' illustre geometra francese vuol trovarvi, sarebbe stato necessario dimostrare primieramente che, ponendo note le leggi delle forze molecolari meglio che nol sono nella Fisica odierna, la supposizione di una diversa compressibilità nei punti di contatto potesse offrire un numero di equazioni sufficiente a rendere il problema algoritmicamente determinato. A me sembra che l' imperfezione indicata dal D'Alembert sia reale, ma credo che si rattrovi in tutti i rami del sapere umano; stantechè il nostro spirito non può divinare un fatto inaccessibile all' osservazione diretta, se non dopo aver conosciuto di esservi una sola possibilità. Prendo a modo di esempio, due numeri 7 e 13; li addiziono e ne ottengo la somma 20. Indi formulo la quistione: *determinare i due numeri che addizionati insieme han dato la somma 20.* Nessun calcolatore potrà con sicurezza indicare i due numeri da me uniti nella formazione del 20, quantunque li trovasse tra le infinite combinazioni da cui potrebbe risultare questa somma. Ma se nel dare il numero 20 io avessi aggiunto ancora che 13 n' è stata una parte, allora la scienza mi avrebbe somministrato il mezzo di averne l' altra, poichè non àvvi che un solo numero, il quale unito al 13 può dare la somma 20. Similmente la Meccanica razionale, volendo determinare i singoli valori delle pressioni che avvengono nei quattro o più punti di contatto di un corpo che spinge contro un piano resistente, in realtà si propone di risolvere la seguente quistione: *determinare se vi sia o pur no una sola combinazione di forze parallele, che applicate a quattro o più punti giacenti in uno stesso piano, diano una certa risultante.* Nel risolvere questo problema essa viene a

congiungendo due dei punti dati lascino tutti gli altri dal lato delle y positive, avremo, che chiamando y_r l'ordinata del punto in cui la risultante incontra il piano delle xy, sarà

$$y_r = \frac{L}{Z} = \frac{z_3 y_3 + z_4 y_4 + \ldots}{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots};$$

vale a dire che y_r essendo sempre positiva, qualunque delle suddette congiungenti si prenda ad asse delle x, la risultante delle forze non solo dovrà essere perpendicolare al piano, ma dovrà incontrarlo in un punto interiore al poligono definito dai punti di contatto. I quali se fossero tutti in linea retta, l'equilibrio del corpo richiederebbe ancora che fosse soddisfatta l'equazione $L = 0$; sarebbe dunque $y_r = 0$, ed il punto d'incontro della risultante col piano dovrebbe giocare sulla congiungente i punti di contatto.

conoscere che il numero delle combinazioni è infinito, e perciò dichiara indeterminata la quistione donde è partita, vale a dire che dichiara di non poter definire i valori reali di quelle quattro pressioni in mezzo ad infiniti valori, tutti egualmente possibili. Se il moto dei pianeti potesse risultare da altra combinazione di cause, che quella di una forza di proiezione con un'altra centrale, la Meccanica celeste starebbe ancora tra i desideri del filosofo. Così ancora la Fisica, delle tre ipotesi (l'azione immediata, l'emissione o la vibrazione) che si possono istituire sulla natura della luce, eliminando la prima perchè ripugna al fatto della trasmissione successiva lungo lo spazio che la luce percorre; la seconda, perchè contraddetta dalle leggi meccaniche nella produzione dei fenomeni d'interferenza; è venuta in fine a stabilire su base razionale l'ipotesi di un etere vibrante come cagione immediata dei fenomeni luminosi. E la Filosofia istessa sarebbe mai pervenuta ad esporre il *principio di creazione* in tutta la sua evidenza, se non avesse potuto dimostrare esser la creazione l'unica origine possibile degli esseri contingenti?

CAPO SESTO.

Del centro delle forze e degli assi di equilibrio.

Definizione del centro di due forze concorrenti ad un punto — Il centro di due forze parallele n'è un caso speciale — Quante forze si vogliano agenti in un piano, purchè riducibili ad una sola, avranno un centro — Condizione che rende durevole l'equilibrio di più forze agenti in un piano, quando questo gira intorno ad un asse normale — Mancando una tal condizione, il sistema passerà successivamente dall'equilibrio ad una coppia — Caso in cui la riduzione ad una coppia ha luogo fin dal principio — Caso della riduzione di tutte le forze ad una sola: coordinate del centro — Definizione degli assi di equilibrio — Condizione a cui deve soddisfare un sistema di forze comunque dirette nello spazio, perchè il sistema dei loro punti di applicazione girando intorno ad una retta, questa divenga asse di equilibrio.

63. Agiscano in un piano due forze P e Q *(fig. 65)* le cui direzioni concorrano in punto m: A e B siano i loro punti di applicazione. Immaginiamo che le direzioni delle due forze girino nel loro piano intorno ai punti A e B in un medesimo senso e colla stessa celerità angolare; così rimarrà costante la somma degli angoli $mAB+mBA$, ed in conseguenza il valore dell' angolo m. Dunque il vertice di questo angolo si moverà sulla circonferenza del cerchio mAB. Ma in tale ipotesi le formole (n° 13)

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos m}\,,\quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{P.\operatorname{sen} m}{R}\,,\quad \operatorname{sen}\beta=\frac{Q.\operatorname{sen} m}{R}$$

dimostrano che nel moto delle direzioni di P e Q, la loro risultante R conserverà inalterato il suo valore e quello degli angoli α e β ch' essa forma colle due componenti: dunque la risultante delle due forze passerà sempre per un medesimo punto T della circonferenza mAB. Questo punto si nomina *centro* delle due forze.

Se in vece di supporre che le direzioni delle forze si muo-

vano nel modo descritto, noi fingiamo che rimanendo invariate le direzioni, il piano di esse forze girasse in senso opposto intorno ad un asse normale; è chiaro che la rispettiva posizione del piano e delle direzioni delle forze sarebbe la stessa che nell' ipotesi precedente; e perciò potremo sostituire la seconda ipotesi alla prima in tutto ciò che andremo esponendo.

64. Se le forze P e Q fossero parallele, il punto d'incontro delle loro direzioni giacerebbe ad una distanza infinita dai punti A e B; infinito sarebbe dunque il raggio del cerchio condotto pei punti m A B, ed i tre punti A T B giacerebbero in linea retta. Quindi la proporzione (n° 13)

$$P : Q = sen\alpha : sen\beta$$

diverrebbe

$$P : Q = BT : AT.$$

dalla quale sappiamo (n° 24) che viene determinata la posizione del centro di due forze parallele.

65. Se le forze agenti in un piano sono più di due, ma riducibili ad una sola, esse ammetteranno sempre un centro, che potremo determinare mercè la stessa costruzione indicata nel n° 63. Siano P, Q, S, ec. le forze date; p, q, s ec. i loro punti di applicazione. Pei punti p e q e pel punto d'incontro delle rispettive forze si conduca la circonferenza di un cerchio; avremo così il punto r della sua intersezione colla risultante R di P e Q. Indi pei punti r ed s e pel punto di concorso di R con S si descriva una seconda circonferenza, mercè la quale avremo il centro r' di R ed S, e quindi di P, Q ed S. E continuando nello stesso modo la costruzione dei cerchi e delle risultanti successive, avremo in fine il centro T dell' intero sistema.

66. Se prima che fosse cominciata la rotazione del piano, il sistema delle forze era in equilibrio, dovevano esser soddisfatte le tre equazioni (n° 53)

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Or possiamo supporre che mentre il piano colla sua rotazione intorno ad un asse normale trasporta i punti di applicazione delle forze, lasci in riposo gli assi delle x ed y. Allora le componenti X ed Y di ciascuna forza rimarranno costanti, poichè la sua nuova direzione si conserva parallela alla primitiva; ma le coordinate x ed y del suo punto di applicazione prenderanno dei valori successivamente diversi x_1 ed y_1, e l'equilibrio non potrà durare se non sia soddisfatta l'equazione

$$\Sigma(Yx_1 - Xy_1) = 0.$$

Ma poichè gli assi coordinati si suppongono immobili, mentre il piano delle forze gira intorno ad un asse normale condotto per un punto M *(fig. 66)*; ne segue che quel punto del piano che in principio si confondeva coll'origine A degli assi Ax ed Ay, dopo un moto angolare α sarà passato in A' acquistando le coordinate a e b; e la retta AL, che prima si confondeva con Ax, dopo la stessa rotazione sarà passata in $A'x'$, inclinata ad Ax dello stesso angolo α. Quindi per avere la dipendenza delle coordinate $An' = x_1$ e $p'n' = y_1$ della nuova posizione p' del punto di applicazione di una forza, dalle coordinate $x = An = A's$, $y = pn = p's$ della prima posizione p, e dall'angolo α, basterà supporre che il punto p' riferito agli assi $A'y'$ ed $A'x'$ si volesse poi riferire agli assi Ax, Ay; e perciò secondo le note formole di trasformazione degli assi avremo

$$y_1 = b + x.\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha\,,$$
$$x_1 = a + x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\alpha.$$

I quali valori introdotti nell'espressione del momento risultante ci daranno

$$\Sigma(Yx_1 - Xy_1) = a\,\Sigma Y - b\,\Sigma X + \cos\alpha\,\Sigma(Yx - Xy) - \mathrm{sen}\alpha\,\Sigma(Yy + Xx).$$

Quindi perchè continui l'equilibrio del sistema, dovrà aver

luogo l'equazione

$$\Sigma(Yy+Xx)=0.$$

67. Se quest'ultima equazione non è soddisfatta ed il sistema era da principio in equilibrio, la rotazione lo trasformerà in coppia, il cui momento sarà espresso da

$$-\,sen\alpha\Sigma(Yy+Xx)=-h\,sen\,\alpha,$$

facendo $\Sigma(Xy+Xx)=h$. Questo momento, indipendente dalle coordinate a e b, sarà lo stesso per tutti i punti del piano; ed in fatti, se in vece di far rotare il piano delle forze intorno all'asse proiettato in M, lo avessimo trasportato parallelamente ad yAx da A in A' e poi fattolo girare intorno al punto A' per un angolo α, avremmo avuto la stessa posizione del piano delle forze rispetto a quello delle coordinate.

Essendo $sen\alpha=1$ per tutti gli archi espressi da $(2n+1)90°$, e $sen\alpha=0$ per quelli rappresentati da $2n.90°$, ne segue che continuando la rotazione del piano il sistema delle forze passerà successivamente dall'equilibrio ad una coppia, il cui momento dopo aver toccato un valore massimo, tornerà di bel nuovo a divenir nullo. Le posizioni di momento nullo e quindi di equilibrio, coincideranno colla prima posizione del sistema, o ne saranno distanti di 180°, e quelle di valore massimo giaceranno ai due lati dell'altra ed inclinate ad essa di 90°.

68. Ma se il sistema delle forze fosse stato fin dal principio riducibile ad una coppia, allora avremmo avuto

$$\Sigma X=0,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma(Yx-Xy)=N;$$

quindi

$$\Sigma(Yx_1-Xy_1)=N\cos\alpha-h\,sen\alpha.$$

In conseguenza perchè il sistema delle forze si riduca all'equilibrio mercè la rotazione del loro piano, dovrà esser

soddisfatta l' equazione

$$N\cos\alpha - h\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0,$$

donde

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{N}{h}.$$

Or questa tangente appartenendo agli archi α, $180^\circ+\alpha$,... $n.180^\circ+\alpha$, si vede che nella continuazione del moto del piano, vi saranno due posizioni diametralmente opposte nelle quali il sistema delle forze resterà equilibrato; mentre nelle posizioni intermedie ricomparirà la coppia con un momento, il cui valore dopo aver raggiunto il massimo $-h$, volgerà nuovamente verso zero.

69. Poniamo in fine che il sistema delle forze si possa comporre in una sola risultante R, le cui componenti parallele agli assi saranno ΣX e ΣY. Vi sarà allora una forza $-R$ che potrà ridurre il sistema all' equilibrio. Chiamiamone X_1 ed Y_1 le componenti parallele agli assi ed x_1 y_1 le coordinate del suo punto di applicazione; la condizione di equilibrio richiederà soddisfatte le quattro equazioni

$$X_1+\Sigma X=0,\quad Y_1x_1-X_1y_1+N=0$$
$$Y_1+\Sigma Y=0\quad X_1x_1+Y_1y_1+h=0.$$

Dalle quali equazioni eliminando Y_1 ed X_1, avremo

$$x_1\Sigma Y-y_1\Sigma X=N\ ,\ x_1\Sigma X+y_1\Sigma Y=h,$$

che ci daranno

$$x_1=\frac{h\Sigma X+N\Sigma Y}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2}\ ,\ y_1=\frac{h\Sigma Y-N\Sigma X}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2}.$$

Saranno queste le coordinate di un punto, pel quale passerà costantemente la risultante delle forze durante il moto del piano, ossia che x_1 ed y_1 saranno le coordinate del centro di esse forze. Le quali se fossero in equilibrio, i valori di x_1 ed y_1 si presenterebbero sotto la forma $\frac{0}{0}$, poichè vi sa-

rebbero tanti centri, quante sono le combinazioni ad $n-1$ delle n forze (n° 20).

Se le forze date fossero tra loro parallele, e φ indicasse l'angolo della loro inclinazione all'asse delle x, avremmo (chiamando P una delle forze) $X=P.cos\varphi$, $Y=Psen\varphi$; quindi

$$\Sigma X=cos\varphi\Sigma P\ ,\ N=sen\varphi\Sigma Px-cos\varphi\Sigma Py\ ,$$
$$\Sigma Y=sen\varphi\Sigma P\ ,\ h=sen\varphi\Sigma Py+cos\varphi\Sigma Px.$$

I quali valori sostituiti nelle espressioni di x_1 ed y_1 ci daranno

$$x_1=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}\ ,\quad y_1=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P}\ ,$$

che sono (n° 26) le note coordinate del centro di un sistema di forze parallele agenti in un medesimo piano.

70. Sappiamo (n° 66) che quando per un sistema di forze agenti in un piano è soddisfatta l'equazione $\Sigma(Yy+Xx)=0$, l'equilibrio primitivo delle forze continuerà di aver luogo, qualunque sia il punto del piano pel quale passerà la normale intorno a cui il sistema dovrà girare. Quest'asse di rotazione prende allora il nome di *asse di equlibrio*. Laonde un sistema di forze agenti in un piano o non avrà asse di equilibrio, o ne avrà uno in ogni normale al piano.

71. Finora abbiamo considerato delle forze agenti in un piano. Supponiamo in vece che siano dirette comunque nello spazio; e cerchiamo a quali condizioni esse dovranno soddisfare, perchè il loro primo equilibrio non sia turbato, quando il sistema dei loro punti di applicazione giri intorno ad un asse, lasciando le nuove direzioni delle forze parallele alle prime.

Sia AB *(fig. 67)* l'asse di rotazione, M il punto di applicazione di una forza, ed MN la sua direzione e quantità. Sia inoltre OP la sua proiezione sul piano KL perpendicolare all'asse AB; ed MT, NS due parallele ad OP. Prolun-

gando OP, finchè sia OQ = OP, potremo all' azione di MN sostituire quella delle sue due componenti MT ed MS, e delle due forze eguali ed opposte OP, OQ; vale a dire le due forze MS ed OP, e la coppia MT,— OQ. La quale equivalenza starà sempre durante la rotazione del corpo intorno all' asse AB, poichè supponiamo la forza MN costantemente parallela a se stessa.

Operando nello stesso modo su ciascuna delle rimanenti forze, l' intero loro sistema si troverà equivalente a tre altri sistemi; l' uno di forze parallele all' asse di rotazione, e che nominiamo V; un secondo, che diciamo H, di forze agenti nel piano KL; ed in fine un terzo, W, di coppie i cui piani sono perpendicolari a KL.

Or non potendo la forza unica od anche la coppia, a cui si potrà ridurre il sistema H, essere equilibrata dalla forza unica o dalla coppia che potrà risultare dalla composizione di V con W; ne segue primieramente che il sistema H da un lato, ed i due sistemi V e W dall' altro dovranno essere isolatamente equilibrati.

Rispetto poi ai due sistemi V e W osserviamo che non potendo una forza equilibrare una coppia, l' equilibrio dei due sistemi dovrà necessariamente risultare o dall' essere V riducibile ad una coppia di momento eguale ed opposto alla coppia risultante da W, ovvero dall' essere V e W ciascuno in equilibrio per se medesimo. Che anzi quest' ultima supposizione è la sola ammessibile; poichè se in una certa posizione del corpo i piani delle due coppie V e W riescono paralleli, e quindi possono dar luogo all' equilibrio dei due sistemi; colla continuazione poi del moto, il piano della coppia V prendendo movimento angolare, mentre quello di W correrebbe parallelo a se stesso, i due piani comincerebbero a formare un angolo diedro, e i due sistemi V e W in vece di farsi equilibrio a vicenda si comporrebbero in una coppia risultante.

Dunque: *perchè l' asse di rotazione di un corpo sotto-*

posto all' azione di forze comunque dirette nello spazio, sia nel tempo stesso asse di equilibrio, egli è necessario e sufficiente — 1.° Che proiettato il sistema delle forze sopra rette condotte pei punti di applicazione parallelamente all' asse, tali proiezioni siano tra loro in equilibrio — 2.° Che proiettato il sistema delle forze sopra un piano perpendicolare all' asse di rotazione, l' equilibrio di queste proiezioni non sia turbato dalla rotazione del corpo; vale a dire che prendendo il piano di proiezione per quello delle x, y, e supponendolo immobile durante la rotazione del corpo, l' equazione $\Sigma(Yy+Xx)=0$ *sia soddisfatta* [1].

CAPO SETTIMO.

Della stabilità di equilibrio.

Definizione dell' equilibrio stabile, instabile ed indifferente — Condizioni per le quali l' equilibrio tra due forze può assumere una delle tre forme precedenti — Espressione analitica di queste condizioni — Riduzione dell' equilibrio tra forze parallele al caso precedente — Applicazione all' equilibrio di un corpo pesante — Analoga riduzione rispetto alle forze agenti in un piano — *Idem* rispetto alle forze comunque dirette nello spazio — Equilibrio neutro.

72. Quando più forze agenti sopra un sistema invariabile di punti si facciano mutuamente equilibrio, e rimanendo esse inalterate di grandezza e parallele alle prime direzioni, il sistema dei punti venga rimosso dal suo sito; potrà avvenire che l' equilibrio continui non pertanto ad aver luogo

[1] La teorica degli assi di equilibrio è di molto interesse nella Statica razionale. Per non oltrepassare i limiti di un' esposizione elementare, abbiamo dovuto restringerci ai soli principî fondamentali. Ma se il lettore ne desiderasse un' esposizione compiuta, la troverebbe nel capo 8° della 1ª parte dell' opera — *Lehrbuch der Statik* — dell' illustre Möbius.

tra le forze, ovvero che cessi di esistere. Nel primo caso avremo un *equilibrio indifferente* al moto del sistema; e nel secondo caso se l'azione delle forze tenderà a ristabilire il sistema nella sua prima giacitura, l' equilibrio sarà *stabile*, ed *instabile* viceversa se le forze tenderanno a vieppiù allontanarnelo. La Dinamica esaminerà le leggi, secondo le quali andrà ad attuarsi il ritorno del sistema alla prima posizione di equilibrio; ma spetta alla Statica definire le condizioni per le quali l' equilibrio di un corpo assumerà una delle tre forme qui sopra indicate.

73. Incominciamo dall' esaminare il caso più semplice, qual' è quello dell' equilibrio tra due forze. Poichè esse debbono stare sopra una stessa retta ed agire in opposte direzioni, sarà necessario che nella stessa retta si trovino ancora i loro punti di applicazione. Or le contrarie azioni delle due forze potranno elidersi, o tendendo ad allontanare l' un punto dall' altro, ovvero spingendoli l' un contro l' altro. Siano a e b (*fig.* 68) i due punti: nel primo caso le due forze agiranno come P e Q, nel secondo come P' e Q'.

Quando le due forze agiscono come P e Q, e che il sistema dei loro punti di applicazione sia passato dalla posizione $a\,b$ (*fig.* 68) all' altra $a'\,b'$ (*fig.* 69), allora le due forze P e Q comporranno una coppia, la quale colla sua azione tenderà di ridurre i punti di applicazione nei luoghi di prima. Ma se le forze agissero come P' e Q', la coppia da esse formata tenderebbe invece di allontanare la retta $a'b'$ dalla posizione ab. Sarà dunque stabile l' equilibrio tra P e Q, instabile tra P' e Q'. Ma P e Q tendevano a vicendevolmente allontanare i loro punti di applicazione, P' e Q' ad avvicinarli; dunque

L' equilibrio tra due forze sarà stabile o instabile, secondochè le loro azioni tenderanno ad aumentare o diminuire la distanza dei rispettivi punti di applicazione.

Se i punti di applicazione delle due forze coincidessero in un solo, l' equilibrio sarebbe indifferente.

74. A fine di esprimere analiticamente queste condizioni che assicurano qual forma di equilibrio avrà luogo tra due forze, osserviamo che la forza P (*fig. 68*) e la retta ba, la forza Q e la retta ab sono dirette nello stesso senso, e perciò dovranno avere lo stesso segno: sarà dunque $P.ba = Q.ab$ un prodotto positivo. Al contrario P' e ba, Q' ed ab hanno direzioni opposte; e quindi i due prodotti eguali $P'.ba$, $Q'.ab$ dovranno essere negativi. Ed in fine essendo nella coincidenza dei punti di applicazione $ab = 0$, saranno ancora nulli i prodotti $P.ba$ e $Q.ab$. Dunque

L'equilibrio di due forze sarà stabile, instabile o indifferente, secondochè sarà positivo, negativo o nullo il prodotto di ciascuna forza per la distanza che separa dal suo punto di applicazione quello dell' altra.

75. La ricerca delle analoghe condizioni di equilibrio nei sistemi di forze comunque dirette nello spazio non sarà che un' agevole riduzione al caso semplicissimo di due forze.

Cominciamo dal supporre parallele le forze in equilibrio; e P, P', P'', ec. ne rappresentino i valori. Facendo astrazione dalla prima di esse e cercando la risultante $P_1 = \Sigma P$ delle rimanenti forze P', P'', ec. avremo $P_1 = -P$. Chiamando $x\ y\ z$, $x'\ y'\ z'$, ec. le coordinate dei punti di applicazione delle forze P, P', P'' ec; e supponendo inoltre che l'asse delle z sia parallelo alla direzione delle forze, avremo in conseguenza dell' equilibrio dato (n° 27)

$$P + P_1 = 0\,,\ Px + \Sigma P'x' = 0\,,\ Py + \Sigma P'y' = 0.$$

Or indicando con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto di applicazione di P_1, ossia del centro di P', P'', P''', ec; e nei loro valori

$$x_1 = \frac{\Sigma P'x'}{\Sigma P'}\,,\ y_1 = \frac{\Sigma P'y'}{\Sigma P'}\,,\ z_1 = \frac{\Sigma P'z'}{\Sigma P'}$$

sostituendo $-P$, $-Px$, $-Py$ a $\Sigma P'$, $\Sigma P'x'$, $\Sigma P'y'$, avremo

$$x_1 = \frac{Px}{P} = x\,,\ y_1 = \frac{\Sigma Py}{P} = y\,,\ z_1 = -\frac{\Sigma P'z'}{P}.$$

Così i punti di applicazioni di P_1 e $-P$ avendo la stessa x e la stessa y, giaceranno sopra una retta parallela all'asse delle z; quindi sarà la loro distanza

$$z_1 - z = -\frac{\Sigma P'z'}{P} - z = -\frac{\Sigma P'z' + Pz}{P} = -\frac{\Sigma Pz}{P}.$$

Ma se P e $z_1 - z$ hanno uno stesso segno, un medesimo segno avranno ancora P_1 e $z - z_1$; ed i due prodotti $P(z_1 - z)$, $P_1(z - z_1)$ saranno positivi. Gli stessi prodotti saranno in vece negativi, se P e $z_1 - z$, e quindi P_1 e $z - z_1$, avranno segni diversi; e finalmente sarà nullo l'uno e l'altro prodotto, quando sia $z_1 - z = 0$, vale a dire che siano coincidenti i punti di applicazione di P e P_1. Sarà dunque stabile l'equilibrio nel 1° caso, instabile nel 2°, ed indifferente nel 3°.

Or la lunghezza $z_1 - z$ essendo indipendente dalla distanza del piano delle $x\,y$ dai punti di applicazione di P_1 e $-P$, sarà ancora indipendente dal sito dello stesso piano il valore di $\Sigma Pz = -P(z_1 - z)$. Quindi

Se da un piano comunque diretto siano intersecate le direzioni di un sistema di forze parallele in equilibrio, la somma algebrica dei prodotti di ciascuna forza per la parte di sua direzione compresa tra il suo punto di applicazione ed il piano segante, sarà indipendente dalla posizione di questo piano; e secondochè essa somma sarà positiva, negativa o nulla, l'equilibrio sarà stabile, instabile o indifferente.

76. Applichiamo questa regola a determinare la specie di equilibrio di un corpo pesante sospeso o sostenuto. Sia B (*fig. 70*) il corpo, a il suo centro di gravità; la verticale Ag sia l'asse delle z, ed An rappresenti il piano delle yx. Riguardando il peso G del corpo come risultante delle forze comunicate dalla gravità alle sue molecole, avremo

$$\Sigma P'z' = g\int z.dM = gM.ac = G.ac$$

g indicando l'energia molecolare della gravità, ed M la

massa del corpo. Or sia B sospeso nl punto fisso b per mezzo del filo ab: potremo, in vece di supporre in b un punto fisso, immaginarvi applicata una forza eguale ed opposta al peso G. Avremo così $P = -G$, e $Pz = -G.bc$. Quindi sarà

$$\Sigma Pz = \Sigma P'z' + Pz = g \int z dM - G.bc = G(ac - bc)$$

prodotto positivo, poichè lo sono i due fattori; quindi l'equilibrio è stabile, come l'esperienza riferma col fatto delle oscillazioni.

Supponiamo in vece che il corpo fosse sostenuto da una verga rigidn ba, fissnta al corpo nel suo centro di gravità a e mobile intorno all'estremo b'. Avremo in questo caso

$$g \int z dM + Pz = G(ac - b'c) = - G.b'a\ ;$$

e l'equilibrio, com'ern da attendersi, risulta instabile.

Se finalmente immaginiamo il corpo mobile intorno ad un asse orizzontale condotto pel suo centro di gravità a, avremo

$$g \int z dM + Pz = G(ac - ac) = 0,$$

risultamento conforme all'equilibrio indifferente, in cui si troverà il corpo.

77. Egualmente facile è la riduzione del caso di più forze comunque agenti in un piano a quello di due sole. Ed in vero sappiamo (n° 20) che in un sistemn di forze equilibrato ciascunn di esse è eguale ed opposta alla risultante di tutte le altre; quindi se tra le forze comunque agenti in un piano ne prendiamo una ad arbitrio P e cerchiamo la risultante P_r di tutte le altre, potremo riguardare il sistema come composto dalle sole forze P e P_r. Se queste due forze tenderanno ad avvicinare i loro punti di applicazione a e b (*fig. 71*), allora la coppia in cui vanno a comporsi le due forze, mentre la rotazione del piano trasporta a in a' e b in b', avrà un momento cospirante al moto del piano. Ma

se le forze, come P' e P'_1, tendessero ad aumentare la mutua distanza dei loro punti di applicazione, l'azione della coppia $P',-P'_1$ sarebbe diretta a restituire il piano nella sua prima posizione. Sarà dunque l'equilibrio stabile o instabile, secondochè il momento della coppia ed il moto del piano saranno opposti o cospiranti.

Ma quando il piano di un sistema equilibrato di forze, girando intorno ad un asse normale, trasporta nel suo moto i punti di applicazione delle forze lasciando le loro direzioni parallele alle prime, allora sappiamo dal n° 66 che il sistema passa in generale dall'equilibrio ad una coppia, il cui momento nello stesso n° abbiamo trovato eguale a $-sen\alpha\Sigma(Yy+Xx)$, supponendo nel piano un moto angolare α nel senso positivo, vale a dire da sinistra a destra. Quindi se $\Sigma(Yy+Xx)$ è anche positivo; la tendenza della coppia sarà opposta al moto del piano, e l'equilibrio sarà stabile; e se $\Sigma(Yy+Xx)$ fosse negativo, la coppia agirebbe nello stesso senso del piano, e l'equilibrio sarebbe instabile: se in fine si avesse $\Sigma(Yy+Xx)=0$, l'equilibrio non verrebbe giammai meno. Dunque

L'equilibrio in un sistema di forze comunque agenti in un piano sarà stabile, instabile o indifferente, secondochè $\Sigma(Yy+Xx)$ *avrà un valore positivo, negativo o nullo.*

78. Volendo in fine rinvenire la condizione di stabilità per l'equilibrio di un sistema di forze comunque dirette nello spazio, osserviamo che potendo ogni forza MN *(fig. 67)* esser sostituita (n° 71) dalla forza MS parallela all'asse di rotazione AB che togliamo ad asse delle z, dalla coppia MT,—OQ, e dalla proiezione OP della MN sul piano KL perpendicolare ad AB, ed in cui riponiamo quello delle xy; avremo l'azione delle forze date equivalente a quella di tre sistemi, l'uno di forze parallele all'asse di rotazione, un altro di coppie i cui piani sono allo stesso asse paralleli, ed in fine un terzo di forze agenti in un piano normale all'asse. Egli è chiaro che i due primi sistemi, l'uno di forze

parallele ad AB e l' altro di coppie, come MT,—OQ, non potranno nè secondare nè opporsi alla rotazione del sistema dei punti di applicazione intorno alla retta AB: resteranno così efficaci le sole forze rappresentate dalle proiezioni sul piano KL, le quali decomposte parallelamente agli assi delle x ed y c' indicheranno un equilibrio stabile ovvero instabile, secondochè $\Sigma(Xx+Yy)$ avrà un valore positivo o negativo.

79. Purtuttavia dall' essere $\Sigma(Xx+Yy)=0$ non potremo, come nel caso delle forze agenti in un piano, dedurre che l' equilibrio sia indifferente, se non dopo aver conosciuto esser in equilibrio sì le forze parallele all' asse delle z che le coppie giacenti in piani normali a quello delle xy; vale a dire, se non dopo aver conosciuto che l' asse delle z è un asse di equilibrio (n° 70). Ma se queste due ultime condizioni non fossero soddisfatte, allora non potremmo riguardare l' equilibrio come indifferente, poichè le forze parallele all' asse delle z e le coppie giacenti in piani paralleli al medesimo asse tenderebbero a rimuoverlo dal suo sito. Nè tampoco potremmo dire che in tal caso l' equilibrio fosse stabile ovvero instabile, poichè le forze rimaste efficaci dopo la rotazione del sistema non avrebbero tendenza nè a ricondurlo nel primo sito, nè a promuoverne il moto già cominciato. Questa speciale condizione di equilibrio è stata distinta dal Möbius col nome di *equilibrio neutro*.

CAPO OTTAVO.

Dei massimi e minimi nell' equilibrio.

Analogia delle condizioni di stabilità o instabilità dell' equilibrio con quelle del massimo e minimo nelle funzioni di una variabile — La funzione, che nell' equilibrio di due forze diviene un massimo o un minimo, è quella stessa che fa distinguere il loro equilibrio stabile dall' instabile — *Idem* rispetto alle forze agenti in un piano o comunque dirette nello spazio — Applicazione all' equilibrio di un corpo pesante — Principio delle celerità virtuali — Sua utilità nella risoluzione dei problemi meccanici — Principio dei minimi quadrati.

80. Dalle condizioni esposte nel capo precedente rispetto alla stabilità di equilibrio in un sistema di forze si rileva che quando il corpo, a cui sono applicate, gira intorno ad un asse, la loro continuata azione tenderà in generale o a ripristinare i punti di applicazione nei luoghi che prima avevano, o da questi a vieppiù allontanarli; e ciò indipendentemente dall' esser diretta a destra ovvero a sinistra la rotazione comunicata. Or prendendo in una curva piana un punto, sia a destra sia a sinistra di quello, a cui corrisponde l' ordinata massima o minima, avremo che nel primo di questi due casi l' ordinata del punto risulterà minore della massima, e maggiore della minima nel secondo. Vi è dunque un' analogia tra le condizioni della stabilità o instabilità di equilibrio e quelle del massimo o minimo nelle funzioni di una variabile.

81. A viemeglio definire una tale analogia cominciamo dall' esaminarla nel caso più semplice, qual' è quello dell' equilibrio tra due forze. Noi sappiamo (n° 74) che quando i punti di applicazione delle due forze son passati dalla posizione ab (*fig.* 68) all' altra $a'b'$ (*fig.* 69), allora all' equilibrio delle due forze sarà succeduta una coppia, la quale tenderà a ripristinare il sistema dei punti di applicazione nel primo sito ab, ovvero a farnelo vieppiù divergere, se-

condochè il prodotto $P.ba$ sarà positivo o negativo. Ma ba non è che la distanza dei punti di applicazione valutata secondo la direzione della forza P; la quale distanza, allorchè il sistema dei punti sarà passato in $a'b'$, sarà divenuta $sa' = b'a'.cos\varphi$, chiamando φ l'angolo che $b'a'$ forma colla direzione di P. Or il prodotto $P.b'a'.cos\varphi$ sarà positivo nell'equilibrio stabile, ed avrà il suo massimo valore nel luogo stesso di equilibrio, vale a dire quando $b'a'$ avrà preso la posizione ba; e lo stesso prodotto $P.b'a'.cos\varphi$, negativo nell' equilibrio instabile, avrà ancora un valore negativamente massimo nella coincidenza di $b'a'$ con ba. Dunque $P.ba$ sarà un massimo positivo, o un massimo propriamente detto, nell' eqnilibrio stabile; ed un massimo negativo, ossia un minimo, nell' equilibrio instabile.

E perchè questo risultamento sia espresso in funzione delle quantità che possono esser date in una simile quistione, vale a dire in funzione delle grandezze e direzioni delle forze e delle coordinate dei loro punti di applicazione, chiamiamo x_1 y_1 z_1 le coordinate rettangolari di a, x_2 y_2 z_2 quelle di b; X_1 Y_1 Z_1 le componenti di P parallele agli assi, ed X_2 Y_2 Z_2 quelle di Q. E poichè la forza P forma cogli assi degli angoli, i cui coseni sono

$$\frac{X_1}{P}, \quad \frac{Y_1}{P}, \quad \frac{Z_1}{P};$$

e la retta $b'a'$, che si suppone di lunghezza costante, forma coi medesimi assi gli angoli definiti dai coseni

$$\frac{x_1-x_2}{a'b'}, \quad \frac{y_1-y_2}{a'b'}, \quad \frac{z_1-z_2}{a'b'},$$

sarà il coseno dell' angolo $b'a's = \varphi$ espresso da

$$\frac{X_1(x_1-x_2)+Y_1(y_1-y_2)+Z_1(z_1-z_2)}{P.a'b'};$$

ed in conseguenza sarà

$$P.b'a'.\cos\varphi = X_1(x_1 - x_2) + Y_1(y_1 - y_2) + Z_1(z_1 - z_2)$$
$$= X_1x_1 + X_2x_2 + Y_1y_1 + Y_2y_2 + Z_1z_1 + Z_2z_2 ,$$

essendo $X_2 = -X_1$, $Y_2 = -Y_1$, $Z_2 = -Z_1$.

Dunque

$$X_1x_1 + X_2x_2 + Y_1y_1 + Y_2y_2 + Z_1z_1 + Z_2z_2$$

sarà un massimo nell' equilibrio stabile ed un minimo nell' instabile. E questa espressione diverrà

$$X_1x_1 + X_2x_2 + Y_1y_1 + Y_2y_2 ,$$

quando il piano delle xy si farà coincidere con quello della coppia P,—Q.

82. Sarà facile cosa ridurre a questo caso semplicissimo quello di un numero qualunque di forze agenti in un piano, sapendo (n° 66) che mercè la rotazione di questo piano intorno ad un asse normale il loro equilibrio in generale è distrutto, e la loro azione diviene equivalente a quella di una coppia il cui momento è $-\mathrm{sen}\,\alpha\,\Sigma(Xx+Yy)$. Di questa coppia P,—P (*fig. 72*) siano a e c i punti di applicazione allorchè il sistema delle forze è in equilibrio: trasportati poi in a' e c' mercè la rotazione del piano, i due elementi della coppia, perdendo il loro equilibrio, avranno acquistato il momento $P.ec' = P.ac.\mathrm{sen}\,\alpha$; e questo momento dovendo essere eguale a $\mathrm{sen}\,\alpha\Sigma(Xx+Yy)$, sarà $P.ac = \Sigma(Xx+Yy)$. E poichè nel n° precedente abbiamo trovato che $P.ac$ dev' essere un massimo nell' equilibrio stabile ed un minimo nell' instabile, gli stessi limiti di grandezza e nelle medesime circostanze dovranno aver luogo in $\Sigma(Xx+Yy)$: quindi

Nell' equilibrio di un sistema di forze agenti in un piano $\Sigma(Xx+Yy)$ *sarà un* massimo *ovvero un* minimo, *secondochè l' equilibrio sarà stabile o instabile.*

Rispetto poi ad un sistema di forze comunque dirette nello

spazio, supponiamo da prima che la rotazione avvenga intorno ad un asse parallello a quello delle z. Così la stabilità del loro equilibrio dipenderà da quello delle forze proiettate sul piano delle xy, vale a dire dall'essere $\Sigma(Xx+Yy)$ un massimo ovvero un minimo, ed in conseguenza dall'essere massimo o minimo il valore di $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$, poichè ΣZz rimarrà costante. Or se nell'espressione

$$X_1x_1+X_2x_2+Y_1y_1+Y_2y_2+Z_1z_1+Z_2z_2,$$

trovata nel n° precedente, supponiamo che il punto (x_2, y_2, z_2) si confonda coll'origine, essa diverrà

$$X_1x_1+Y_1y_1+Z_1z_1 = P.b'a'.cos\,\varphi.$$

Quindi prendendo la somma degli analoghi prodotti per tutte le forze P del sistema, avremo

$$\Sigma(Xx+Yy+Zz) = \Sigma P.ba.cos(ba\text{`}P).$$

Ma $\Sigma P.ba\,cos(ba\text{`}P)$ è indipendente dalla giacitura degli assi condotti per l'origine b, lo sarà ancora $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$; e perciò il valore di questa funzione sarà un massimo ovvero un minimo intorno a qualunque asse si faccia girare il sistema dei punti di applicazione delle forze in equilibrio.

83. Applichiamo questa teorica all'equilibrio di un corpo pesante. Sia B *(fig. 73)* una palla poggiata sul piano orizzontale KL; sia o il suo centro di figura, e c il centro di gravità. Prendiamo la verticale As come asse delle z, e nell'orizzontale Am poniamo l'intersezione del piano xy con quello della figura. Avremo così $X=0$, $Y=0$, $Z=g.dM$, g indicando la forza di gravità ed M la massa del corpo; e l'equilibrio stabile della palla richiederà che

$$\Sigma Zz = g\int z dM$$

sia un massimo. Ed in vero, se passando la palla da B in

B′, $\int z.dM$ diminuisse di valore, bisognerebbe dire che il centro c passando in c' siasi vieppiù allontanato dal piano KL; ed in tal caso l'azione della gravità concentrata in c', e la resistenza del piano diretta secondo la normale al punto di contatto, formerebbero una coppia tendente a restituire la palla nel primo luogo di equilibrio — Similmente $\int z.dM$ sarebbe stato un minimo, se il centro della palla avesse occupato fin dal principio il luogo n, donde trasportato dalla rotazione in n' avrebbe dato origine ad una coppia cospirante col moto impresso.

Dunque il centro di gravità di un corpo pesante in equilibrio occuperà sempre il luogo più basso o più alto possibile.

84. Abbiamo osservato nel n° 82 che facendo rotare intorno ad un asse qualunque il sistema dei punti di applicazione di più forze in equilibrio, la funzione $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ sarà nel luogo di equilibrio un massimo ovvero un minimo; ma questa funzione godrebbe della stessa proprietà, se in vece di un semplice moto di rotazione fosse comunicato al sistema un moto qualunque? — Per risolvere compiutamente una tal quistione, basterà esaminare i cangiamenti che potranno avvenire in $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ in conseguenza di un semplice moto di traslazione; poichè qualunque si voglia moto potrà esser sempre riprodotto, nei suoi effetti rispetto al mutamento di sito, dalla successione di un moto progressivo ad un altro rotatorio, o viceversa. Ma dietro un moto progressivo che abbia trasportato il punto di origine nel luogo (a, b, c), ogni punto (x, y, z) del sistema avrà le coordinate $x+a$, $y+b$, $z+c$; quindi la funzione $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ dopo un tal movimento sarà divenuta

$$\Sigma\big(X(x+a)+Y(y+b)+Z(z+c)\big)=\Sigma(Xx+Yy+Zz)+a\Sigma X+b\Sigma Y+c\Sigma Z.$$

Ma le forze X, Y, Z essendo da prima in equilibrio, e non avendo mutato il valore col moto del sistema, sarà $\Sigma X=0$,

$\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$. Dunque $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ sarà sempre un massimo o un minimo, con qualunque specie di movimento si cerchi disturbare l'equilibrio primitivo.

Or se il moto del sistema fosse stato infinitesimo, il punto di origine avrebbe acquistato le coordinate dx, dy, dz tali però da lasciare invariata la sua distanza dagli altri punti del sistema; ed avremmo avuto

$$\Sigma\big(X(x+dx)+Y(y+dy)+Z(z+dz)\big)=\Sigma(Xx+Yy+Zz)+\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz);$$

e $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ non potrebbe essere un massimo o un minimo, senza che fosse

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=0.$$

Ma disegnando X, Y, Z le componenti di ciascuna delle forze P del sistema, esse insieme alla loro risultante formeranno un quadrilatero, i cui lati proiettati sopra una retta qualunque daranno la proiezione di P eguale alla somma delle proiezioni di X, Y, Z. Faccia P colla linea di proiezione l'angolo θ, ed X, Y, Z vi facciano rispettivamente gli angoli α, β, γ; avremo

$$P.\cos\theta=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma.$$

Nella quale equazione sostituendo a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i rispettivi valori $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, disegnando ds l'elemento della linea di proiezione, avremo

$$\Sigma P\cos\theta ds=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz);$$

quindi l'equilibrio delle forze P richiederà soddisfatta l'equazione

$$\Sigma P\cos\theta ds=0.$$

Or ponendo che ds disegni l'infinitesimo cammino che

nell' infinitesimo moto del sistema sia percorso dal punto di applicazione di ciascuna delle forze P, sarà $\cos\theta . ds$ la proiezione di quel cammino sulla direzione della forza corrispondente; proiezione positiva o negativa, secondochè cadrà sulla direzione stessa della forza o sul prolungamento di essa. E poichè tali proiezioni sono proporzionali alle velocità iniziali dei punti di applicazione nel disquilibrio del sistema, perciò vanno sotto il nome di *celerità virtuali*, e $\Sigma P \cos\theta ds$ indicherà la somma dei prodotti di ciascuna forza per la celerità virtuale del suo punto di applicazione. Laonde

Ponendo equilibrato un sistema di forze comunque dirette nello spazio, e che il sistema dei corrispondenti punti di applicazione sia rimosso di un infinitesimo dal suo luogo di equilibrio; la somma dei prodotti di ciascuna forza per la celerità virtuale del suo punto di applicazione dovrà esser nulla.

E viceversa: *se l'equazione* $\Sigma P \cos\theta ds = 0$ *è soddisfatta qualunque siano i valori degli angoli* θ, *le forze* P *saranno in equilibrio*. Ed in vero se l' equilibrio non avesse luogo, potremmo sempre ottenerlo mercè l' introduzione di una forza S, o tutto al più di due S_1, S_2 (n° 56) non componibili in una sola, ed allora pel teorema precedente sarebbe soddisfatta l' equazione

$$Ss + \Sigma P \cos\theta ds = 0,$$

ovvero

$$S_1 s_1 + S_2 s_2 + \Sigma P \cos\theta ds = 0,$$

s, s_1, s_2 indicando le celerità virtuali dei punti di applicazione delle forze S, S_1, S_2. Ma per ipotesi abbiamo $\Sigma P \cos\theta ds = 0$; dunque dovrà essere

$$Ss = 0 \text{ , o } S_1 s_1 + S_2 s_2 = 0.$$

soddisfacendo alla prima di queste due equazioni col porre $s = 0$, verremmo a stabilire che il punto di applicazione

della forza S non potesse altrimenti muoversi che in un piano normale alla direzione di S, quale sarebbe precisamente il caso dell' equilibrio di un punto sopra una data superficie. Ma se poniamo, come esige l' equazione $\Sigma P cos\theta ds = 0$, che il punto di applicazione di S possa avere una direzione qualunque nel suo moto, allora l'equazione $Ss = 0$ non potrà essere altrimenti soddisfatta, se non ponendo $S = 0$; la qual cosa importa l' equilibrio delle forze P.

Rispetto poi all'equazione $S_1 s_1 + S_2 s_2 = 0$, quando non vorremo ammettere $S_1 = S_2 = 0$, bisognerà che facciamo una delle seguenti ipotesi — 1ª che siano $s_1 = 0$ ed $s_2 = 0$; la qual cosa richiede o che il sistema giri intorno ad un asse condotto pei punti di applicazione delle forze S_1 ed S_2, ovvero che le linee percorse dei punti di applicazione di queste forze siano normali alle loro direzioni — 2ª che sia $S_1 s_1 = - S_2 s_2$; ciò che non può aver luogo per un movimento comunque diretto, senza supporre che le due forze S_1 ed S_2 siano eguali ed opposte lungo la retta che ne congiunge i punti di applicazione; vale a dire, senza distruggere l' ipotesi da cui fu motivata l' introduzione delle forze S_1 ed S_2. Dunque perchè l' equazione $S_1 s_1 + S_2 s_2 = 0$ sia sempre soddisfatta, è necessario che siano $S_1 = 0$ ed $S_2 = 0$. E perciò se l' equazione $\Sigma P cos\theta ds = 0$ ha luogo per un movimento comunque diretto, il sistema delle forze P sarà necessariamente in equilibrio.

85. In questa generalissima legge statica consiste il così detto *principio delle celerità virtuali*[1], per mezzo del quale

[1] Il principio delle celerità virtuali fu veduto la prima volta da Guido Ubaldi nell'equilibrio della leva e della puleggia mobile; indi Galilei lo ravvisava nei piani inclinati ed in altre macchine che ne dipendono, e perciò lo riguardava come proprietà delle macchine in equilibrio; venne poi Giovanni Bernoulli a stabilirne tutta la generalità, ed a dichiararne la grande utilità nella risoluzione dei problemi che si rapportano ad equilibrio; ed in fine Lagrangia ne fece base della sua Meccanica analitica. Così il princi-

si possono agevolmente tradurre in equazione tutti i problemi relativi all'equilibrio ; come si rileverà chiaramente dal seguente esempio.

pio delle celerità virtuali, conceputo la prima volta da un ingegno italiano, da un altro ingegno italiano riceveva il suo ultimo svolgimento mercè la creazione di una scienza novella.

Il modo, con cui Lagrangia ha presentato un tal principio nella sua Meccanica analitica, è logico per eccellenza, quindi luminoso e semplicissimo. Non trovandovi l'evidenza caratteristica di un principio, egli dopo averne fatto rilevare la manifesta esistenza nelle taglie a cordoni paralleli, ebbe la felice idea di rappresentare ogni sistema di punti animati da forze qualunque con altrettante taglie situate nei medesimi luoghi e congiunte mercè girelle di rinvio da una sola corda, ad un estremo della quale s' immaginasse pendente un peso. Così la legge delle celerità virtuali diveniva un dato sperimentale, che Lagrangia denominò *principio delle puleggе*, e che tradotto in algoritmo presentava l'equazione fondamentale della sua Meccanica analitica, vale a dire di una Meccanica che insegna a risolvere tutti i problemi relativi all' azione delle forze mercè trasformazioni di una prima equazione.

Ma la scienza delle forze, ridotta così allo svolgimento di una equazione, non cessava di essere empirica, come lo era il principio che ne faceva il fondamento; e perciò se la Meccanica lagrangiana è il monumento più prezioso dell' analisi moderna, essa purtuttavia non soddisfece l' ultimo desiderio dello spirito umano, il quale aveva già scorto la possibilità di elevare il calcolo delle forze su basi puramente razionali. Lagrangia, che colla *Teoria delle funzioni* rendeva un omaggio alla Filosofia sensista del suo tempo, non poteva conoscere il pregio di una tal perfezione nella scienza delle forze; e perciò ragguagliando nella 1ª sezione della sua Meccanica i diversi principi messi innanzi come fondamenti della Statica, e condotto così a dover dire della prima dimostrazione *a priori* che il parallelogrammo delle forze riceveva per opera di Daniele Bernoulli, egli così si esprime: « egli è d' uopo confessare che separando in tal modo il principio della composizione delle forze da quello della composizione dei movimenti, si perdono i suoi principali vantaggi, l' evidenza e la semplicità, e si riduce a non esser altro che un risultamento di costruzioni geometriche o di analisi ».

Gli autori di Meccanica venuti dopo Lagrangia, vista la fecon-

Per la gola della girella K (fig. 74) *passi un filo, a i cui estremi siano congiunti due pesi* P *e* Q *che poggiano sulle linee* AB *ed* AC *giacenti nel piano verticale definito dai due capi del filo* PKQ : *si cercano i luoghi occupati dai due pesi nel loro equilibrio.*

Si prenda per origine il luogo occupato dalla girella, e per asse delle x la verticale KL : siano x, y le coordinate del luogo di equilibrio di P, ed x' y' quelle corrispondenti a Q. Scorrendo per un infinitesimo il sistema dei pesi lungo le due linee su cui poggiano, le proiezioni sulle direzioni delle forze degli spazi da essi percorsi saranno dx e dx'; quindi pel teorema delle celerità virtuali abbiamo

$$Pdx+Qdx'=0.$$

Abbiamo inoltre le equazioni delle due linee AB, AC

$$y=f(x)\ ,\quad y=\varphi(x)\ ;$$

dità del principio delle celerità virtuali, e non osando assumerlo come primo nella scienza, si fecero a darne una dimostrazione diretta conducendosi dietro le norme della decomposizione delle forze, vale a dire prendendo come date le leggi fondamentali della Statica. Così il teorema delle celerità virtuali, cessando di essere un principio, nè potendo (perchè dedotto da speciale dimostrazione) rappresentare l'ultimo e generale risultamento di tutta la sintesi delle speciali leggi di equilibrio, rimaneva necessariamente estraneo al sistema delle cognizioni statiche; e qualunque luogo se gli fosse assegnato nel corpo dell'opera, non cessava di essere logicamente un'appendice, buona soltanto a mettere in luce la storia della scienza.

Quando la forma razionale non concede che il teorema delle celerità virtuali serva di principio alla scienza delle forze, il suo posto naturale è quello di essere un corollario della proprietà di massimo e minimo di cui godono i sistemi in equilibrio. Situato così alla sommità di tutte le cognizioni statiche, basta il solo suo posto a chiarirci della sua prodigiosa fecondità, e se allora, volessimo da esso dedurre le leggi proprie ai diversi casi elementari di composizione delle forze, non imiteremmo forse colui, che non sapendo dare miglior uso al suo tempo, si facesse a ricercare in qual modo dalla 47ª di Euclide si possa rivenire alla 1ª?

e poichè sarà data la lunghezza l del filo, avremo ancora

$$l=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

E così avremo quattro equazioni per determinare le quattro incognite x, y, x', y'.

Poniamo per esempio che le due linee AB ed AC siano due rette *(fig. 75)*, quali si avrebbero nel caso di due piani inclinati, e che la girella poggi in modo sullo spigolo dell' angolo diedro A formato dai due piani, che i due capi di filo AP ed AQ siano rispettivamente paralleli ad AB ed AC. Condotta l' orizzontale BC, chiamiamo a l' altezza AL comune ai due piani, e facciamo BL $=b$, LC $=b'$. Così

$$y=\frac{b}{a}x\ ,\ \ y=\frac{b'}{a}x$$

esprimeranno le equazioni delle due rette AB ed AC. Quindi, chiamando x ed y le coordinate del luogo occupato da P, x' ed y' quelle di Q, avremo

$$l=\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{x'}{a}\sqrt{a^2+b'^2},$$

ossia

$$l.a=\text{AB}.x+\text{AC}.x',$$

essendo AB $=\sqrt{a^2+b^2}$, AC $=\sqrt{a^2+b'^2}$. E poichè differenziando l' ultima equazione, e poi sostituendovi in vece di dx' il suo valore tratto dall' equazione

$$\text{P}dx+\text{Q}dx'=0,$$

noi abbiamo

$$\left(\text{P}-\text{Q}\,\frac{\text{AB}}{\text{AC}}\right)dx=0\ ;$$

così è chiaro che dovendo esser soddisfatta quest' ultima condizione, indipendente dalle coordinate dei luoghi occupati

da P e Q, il loro equilibrio sarà indifferente o impossibile. E perciò l'ultima equazione in vece di definire i luoghi di equilibrio di P e Q, stabilisce in vece che i valori di questi due pesi dovranno essere direttamente proporzionali alle lunghezze AB ed AC.

86. Poichè volendo rappresentare graficamente una forza, noi partendo dal suo punto di applicazione conduciamo nel senso della sua direzione una retta proporzionale alla sua intensità; ne segue che se chiamiamo x, y, z le coordinate del punto di applicazione di una forza, e ξ, η, ζ quelle del l'altro estremo della retta che la rappresenta, le sue componenti X, Y, Z, parallele agli assi, saranno espresse da

$$X = \xi - x\,,\ Y = \eta - y,\ Z = \zeta - z\,;$$

e se questi valori sostituiremo nell'equazione

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0\,,$$

ch'è l'espressione analitica del principio delle celerità virtuali, avremo

$$\Sigma\big((\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz\big) = 0.$$

Or moltiplicando quest'ultima equazione per -2 e riguardandovi ξ, η, ζ come costanti, il suo integrale sarà

$$\Sigma\big((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\big) = \mathrm{M}.$$

Quindi se le forze $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ sono in equilibrio, M sarà un massimo o ovvero un minimo (n° 82); perciò

Se più forze comunque agenti sopra un sistema di punti A A', A'',... *siano in equilibrio, e le loro grandezze e direzioni siano rappresentate per mezzo di rette condotte dai punti* A, A', A'',... *ai punti* B, B', B'',...; *e siano inoltre questi secondi punti immobili, mentre il sistema dei primi sia comunque rimosso dal suo luogo di equilibrio;*

la somma dei quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{A'B'}^2$,... *sarà per quel luogo un massimo ovvero un minimo.*

E viceversa: *avendosi un sistema mobile di punti* A, A', A'',... *le cui mutue distanze siano invariabili, ed un altro immobile di altrettanti punti* B, B', B'',...; *e che il primo si ponga in tale situazione rispetto al secondo che la somma dei quadrati* $\overline{AB}^2$, $\overline{A'B'}^2$, $\overline{A''B''}^2$,... *sia un massimo o un minimo; un sistema di forze, le quali fossero in grandezza e direzione rappresentate dalle distanze* AB, A'B', A''B'',..., *sarebbe in equilibrio.*

Ciò che poi decide se M debba essere un massimo ovvero un minimo, consiste, come è noto, nel segno del differenziale secondo di M, che differenziata due volte di seguito ci dà

$$d^2M = 2\Sigma(dx^2+dy^2+dz^2) - 2\Sigma\left((\xi-x)d^2x+(\eta-y)d^2y+(\zeta-z)d^2z\right)$$
$$= 2\Sigma(dx^2+dy^2+dz^2) - 2\Sigma(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z).$$

Or essendo $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ un massimo nell' equilibrio stabile, il suo differenziale secondo $\Sigma(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z)$ sarà negativo; quindi d^2M sarà positivo ed M sarà un minimo.

Ma se poniamo che X, Y, Z siano quantità infinitesime, ciò che non ripugna alla rappresentazione grafica delle forze, poichè non i valori assoluti ma bensì i rapporti delle linee ne disegneranno le rispettive grandezze; allora $\Sigma(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z)$ divenendo infinitesimo del 3° ordine, scomparirà rispetto all' infinitesimo del 2° ordine $\Sigma(dx^2+dy^2+dz^2)$, e d^2M sarà sempre positivo, e quindi M un minimo, sia massima o minima $\Sigma(Xx+Yy+Zz)$. Laonde

Se ad un mobile sistema di punti di applicazione A, A', A'',... *di più forze in equilibrio si avvicini a distanze infinitesime dai primi un immobile sistema di altrettanti punti* B, B', B'',... *ed in modo che le rispettive distanze* AB, A'B', A''B'',... *dei primi punti dai secondi rap-*

presentino in grandezza e direzione le forze applicate ; la somma dei quadrati di esse distanze sarà sempre un minimo pel luogo di equilibrio.

In questa proposizione consiste il *principio dei minimi quadrati*, veduto la prima volta da Gauss.

CAPO NONO.

Dell' equilibrio nei fili perfettamente flessibili.

Ragione delle ipotesi di perfetta rigidezza e perfetta flessibilità messe innanzi nelle quistioni relative all' equilibrio dei sistemi — Equilibrio di un filo flessibile interamente libero, e sottoposto all' aziono di due forze che lo tendono in opposte direzioni — Equilibrio di un filo teso sopra una data superficie — Equilibrio di un filo flessibile che fisso nei punti estremi sia animato da forze proporzionali agli elementi di lunghezza e comunque dirette nello spazio — Caso in cui le forze siano normali alla curva di equilibrio — Equilibrio di un filo flessibile sottoposto all' azione di forze parallele proporzionali agli elementi di lunghezza — Applicazione al caso di un filo pesante liberamente sospeso a due punti fissi: catenaria — Questa curva è rettificabile — Calcolo delle tensioni nei suoi diversi punti: conseguenze che ne derivano — Raggio di curvatura della catenaria — Determinazione del suo parametro, quando siano date la lunghezza del filo e le coordinate dei punti estremi: conseguenze che ne derivano — Coordinate del centro di gravità di un arco di catenaria — Proprietà di cui esso gode — Catenaria formata da un filo giacente sopra un piano inclinato all' orizzonte — Curva di equilibrio di un filo animato in tutti i punti da forze parallele proporzionali alle proiezioni degli elementi del filo sopra un piano perpendicolare alla comune direzione delle forze.

87. Finora abbiamo supposto che il sistema dei punti di applicazione fosse indefinitamente rigido, vale a dire che l' azione delle forze non valesse a far variare le loro mutue distanze. Questa ipotesi puramente matematica, poichè in natura non vi ha corpi di tal fatta, si è ammessa a fine di

ridurre alla massima semplicità ed in conseguenza alla più grande generalità la legge di composizione per un sistema qualunque di forze. Un' altra ipotesi egualmente matematica ed istituita pel medesimo obbietto è quella che ci presenta i punti di applicazione delle forze ordinati nella massa di un corpo perfettamente flessibile ed inestensibile. In realtà ogni corpo solido è un sistema di punti materiali congiunti da mutue tendenze, le quali non avendo energia indefinita possono esser diminuite ed anche superate da forze esteriori; e quando queste forze non estendano la loro azione fino a produrre interruzione di continuità nella massa del solido, non lasceranno pertanto di far variare le rispettive distanze delle molecole tra i limiti della sfera di loro reciproca tendenza. Allora in forza della stessa continuità delle azioni molecolari avviene che le minime particelle di un corpo allontanate dalle loro posizioni di equilibrio conservano tuttavia una tendenza più o meno grande a ritornarvi. Donde risulta ogni solido dover essere più o meno rigido, più o meno elastico; chiamando *elasticità* quella tendenza, massima in taluni solidi e minima in altri, che hanno le molecole di esso solido a ritornare nelle loro prime posizioni di equilibrio, appena che sia cessata l' azione della forza perturbatrice.

88. Se dovessimo indagare la cagione prossima della diversa flessibilità dei solidi, forse non potremmo far di meno di ricercare qual parte potesse avervi la forma speciale delle sue molecole. Ma poichè la Meccanica razionale considera la flessibilità nel limite di assoluta, così può prescindere dalla considerazione della forma propria delle molecole, ed immaginarla di quella figura che meglio convenga ad agevolare la soluzione del problema che si propone. Poniamo dunque che le molecole del corpo flessibile avessero forma sferica, e consideriamone una serie, quale potrebbe essere attuata in un filo infinitamente sottile. Siano A, A′, A″,... (*fig.* 76) i successivi globetti della serie costituente il filo;

c, c', c'',... ne siano i centri, ed m, m', m'',... i punti di mutuo contatto. Egli è vero che nell'ordinamento molecolare di un corpo le sue minime particelle sono a distanza assai grandi in comparazione dei loro diametri; ma quella resistenza ad un moto proprio, che ciascuna di esse incontra nell'equilibrio delle forze attrattive e ripulsive a cui è sottoposta, noi qui riponiamo nell'azione del mutuo contatto, ciò che torna lo stesso in quanto agli effetti delle forze esteriori che vanno ad equilibrarsi pel loro mezzo. Noi dunque supponiamo che le molecole del filo siano l'una a contatto immediato dell'altra, e compongano un sistema equilibrato sotto l'azione delle forze Q ed S agenti sulle molecole estreme della serie.

In tale ipotesi la pressione P, che la molecola A nella direzione cc' esercita sulla molecola A', dovrà essere eguale ed opposta alla pressione —P che viceversa A' esercita su A; e similmente avverrà delle pressioni P' e —P' agenti in m', di P'' e —P' in m'', ec. Così ciascuno dei globetti A', A'',... A^{n-1}, vale a dire dal secondo al penultimo, non potrà essere in equilibrio, senza che le forze opposte P e —P', P' e —P'',... P_{n-2} e $-P^{n-1}$, a cui soggiace, non siano eguali ed agenti sulla medesima retta. Oltre a ciò sul primo globetto A della serie si contrastano le forze Q e —P, del pari che le forze P_{n-1} e —S sull'ultimo globetto A^n: perciò dovrà essere $Q = P$, $P_{n-1} = S$. Dunque perchè il filo sia in equilibrio sotto l'azione delle forze Q ed S applicate ai suoi punti estremi, esse forze e le pressioni ingenerate nei punti di contatto delle sue molecole dovranno giacere in una medesima retta, che nel tempo stesso sarà la linea di equilibrio del filo.

Or egli è chiaro che supponendo prementi le forze Q e —S, l'equilibrio nella serie delle sfere A, A', A'',... non potrà essere che instabile, e tanto meno attuabile per quanto sarà più grande il numero delle sfere e più piccolo il loro diametro; quindi sarà fisicamente impossibile che possa aver

luogo in un filo che s' immagina composto di un numero infinito di globetti infinitamente piccoli.

Ma se immaginiamo, com' è conforme al fatto, che le molecole A, A', A'',... siano congiunte da forze attrattive invincibili dalle forze esteriori P ed S, allora queste da prementi potranno divenir traenti, e così tendendo ad allontanare i loro punti di applicazione produrranno (n° 73) un equilibrio stabile nel sistema delle molecole. In tal caso le pressioni P, P', P'', ec. diverranno altrettante trazioni, che equilibrate dalle forze attrattive delle molecole produranno ciò che nomasi la *tensione del filo*. Laonde

La tensione generata in un filo dall' azione di due forze eguali ed opposte, sarà costante in tutta la sua lunghezza, ed eguale ad una delle forze traenti — Se le due forze fossero diseguali, la tensione sarebbe eguale alla minore di esse, poichè l' eccesso della forza maggiore sulla minore sarebbe impiegato a muovere il filo nel senso della sua lunghezza.

89. Or immaginiamo che il filo invece di essere interamente libero sia in tutto o in parte disteso, mercè l' azione di due forze P e Q *(fig. 77)*, sopra una superficie immobile BC. A, A', A'',... A^n rappresentino le molecole consecutive del filo; c, c', c'',... c^n i loro centri; n, n', n'',... n^n i punti di loro mutuo contatto; ed s, s', s'',... s^n i punti in cui le molecole del filo toccano la superficie BC. Ciascuna di queste molecole, come A', si troverà sottoposta all' azione di tre forze, le due tensioni $c'n$, $c'n'$, e la reazione $s'c'$ della sottoposta superficie; le quali tre forze non potranno tenere in equilibrio la molecola A' se non siano in un medesimo piano e concorrenti ad un punto c'. Ma per ragione ancora di equilibrio le tensioni cn, $c'n$, egualmente che $c'n'$ e $c''n'$, debbono essere in linea retta; dunque i centri di azione di tre molecole consecutive ed il punto s', in cui la molecola intermedia tocca la superficie sottoposta, dovranno giacere in un piano normale ad essa superficie. Ma cc' e $c'c''$,

atteso l'infinitesimo raggio di ogni particella del filo, rappresentano due elementi consecutivi della curva secondo la quale esso combacia colla superficie; ed il piano delle due rette cc' e $c'c''$ è precisamente il piano di curvatura della linea di combaciamento per quel dato punto; dunque

Perchè si abbia equilibrio in un filo perfettamente flessibile e disteso da due contrarie trazioni sopra un' immobile superficie, egli è necessario che per ogni elemento della linea segnata dal filo il piano di curvatura sia normale alla superficie sottoposta.

E poichè questa condizione geometrica distingue la linea più corta che sopra una data superficie possa condursi da un punto di essa all' altro; così potrà dirsi ancora che: *immaginando diviso il filo equilibrato in parti abbastanza piccole* [1], *ognuna di esse tra i suoi punti estremi rappresenti la linea più corta che tra i medesimi punti possa condursi sulla data superficie.*

Inoltre, chiamiamo R, R', R'',... R^n le reazioni della superficie dirette secondo le normali sc, $s'c'$, $s''c''$,... s^nc^n; T, T', T'',... T^n le tensioni $cn = c'n$, $c'n' = c''n'$, ec.; α, α', α'',... α^n gli angoli scn, $s'c'n'$,... $s^nc^nn^n$; β, β', β'',... β^n gli angoli scP, $s'c'n$,... $s^nc^nn^{n-1}$; ed in fine sia P la forza applicata all' estremo A del filo e Q quella applicata all' altro estremo A^n: le ragioni che durante l'equilibrio dovranno aver luogo tra le tensioni T, le reazioni R e le forze traenti P e

[1] Senza questa restrizione la linea potrebbe non esser la più corta, quantunque il piano di curvatura di ogni suo elemento fosse normale alla superficie su cui la linea giace. Così il piano di un cerchio massimo è normale alla superficie sferica; ma se nella sua circonferenza prendiamo un arco maggiore della metà di essa, la lunghezza di quest' arco in vece di esser minima, sarà la massima di tutte le linee circolari che sulla sfera potranno condursi per gli estremi dell' arco.

Q saranno date dalle proporzioni

$$P : T : R = sen\alpha : sen\beta : sen(\alpha+\beta)$$
$$T : T' : R' = sen\alpha' : sen\beta' : sen(\alpha'+\beta')$$
$$T' : T'' : R'' = sen\alpha'' : sen\beta'' : sen(\alpha''+\beta'')$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$T^{n-1} : Q : R = sen\alpha^n : sen\beta^n : sen(\alpha^n+\beta^n).$$

Dalle quali proporzioni si ha

$$P = T\frac{sen\alpha}{sen\beta}, \; T = T'\frac{sen\alpha'}{sen\beta'}, \; T' = T''\frac{sen\alpha''}{sen\beta''}, \ldots \; T^{n-1} = Q\frac{sen\alpha^n}{sen\beta^n}$$

Ma stante l'eguaglianza e l'infinitesima piccolezza delle molecole A, A', A'',... A^n, ciascuno degli angoli α, β, α' β',... α^n, β^n differirà di un infinitesimo da 90°. Saranno dunque i loro seni tra essi differenti per un infinitesimo di 2° ordine [1]; quindi avremo

$$P = T = T' = T'' = \ldots:\ldots = T^{n-1} = Q,$$

a meno di un infinitesimo di 2° ordine, ed in conseguenza due tensioni T e T_1 in due punti del filo distanti per una lunghezza finita, differiranno di un infinitesimo di 1° ordine, e perciò saranno eguali tra esse. Laonde

Perchè il filo disteso sopra una superficie immobile sia in equilibrio, dovranno essere eguali le due forze traenti, ed eguale ad una di esse la tensione in ogni punto del filo.

È chiaro inoltre che le due forze P e Q essendo dirette

[1] Sia l'arco $An = dx$ *(fig. 78)*; quindi l'arco $Cn = \frac{1}{2}\pi - dx$, e sarà il suo seno $nb = AO - As$. Ma

$$As : sn = sn : sD\,;$$

dunque essendo $An = dx$, sn sarà un infinitesimo di 1° ordine, ed As infinitesimo di 2° ordine.

secondo il prolungamento del primo ed ultimo elemento del filo, dovranno confondersi colle tangenti condotte ai punti estremi della curva formata dallo stesso filo.

90. Dalla proporzione

$$P : T : R = sen\alpha : sen\beta : sen(\alpha+\beta)$$

si deduce che la pressione R esercitata da un elemento del filo sulla sottoposta superficie, sarà data dall' equazione

$$R = T\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen\beta} = Tsen(\alpha+\beta),$$

essendo $sen\ \beta = 1$ a meno di un infinitesimo di 2° ordine. Or $\alpha+\beta$ rappresenta l'angolo *abc* (*fig.* 79) formato da due elementi consecutivi *ab* e *bc* della curva del filo; il quale angolo essendo supplemento di *mon* costituito dalle due normali *mo* ed *no*, ed il cui seno è $\frac{ds}{r}$ (indicando ds l' elemento della curva ed r il raggio di curvatura) avremo

$$R = T\frac{ds}{r}.$$

Dunque l' infinitesima pressione fatta da ogni elemento del filo sulla sottoposta superficie varierà da un elemento all' altro in ragione inversa del corrispondente raggio di curvatura. E poichè $T\frac{ds}{r} = \frac{T}{r}ds$, sarà $\frac{T}{r}$ la pressione fatta dall' unità di lunghezza del filo; pressione tanto più grande, quando r sarà più piccolo. Quindi si comprende come due travi strette dalle spire di una fune acquistino, sotto una stessa tensione, un' immobilità relativa tanto più sicura per quanto le travi son più sottili e le spire della fune più ravvicinate.

Dalla stessa equazione deriva ancora che se immaginiamo tolta via la superficie sulla quale il filo è disteso, ed alle

pressioni esercitate nei diversi punti di contatto sostituiamo delle forze eguali ed opposte, l'equilibrio del filo continuerà ad aver luogo. Perciò se ad un filo, di cui siano immobili i punti estremi, immaginiamo applicate per ciascuno dei rimanenti punti delle forze normali alla curva ch' esso forma, ed inversamente proporzionali ai raggi di curvatura corrispondenti a rispettivi punti di applicazione; il filo starà in equilibrio, ed avrà una tensione costante in tutta la sua lunghezza.

91. Passiamo ora a considerare le condizioni di equilibrio di un filo fisso nei punti estremi ed animato in ogni suo elemento da forze, che indichiamo con Pds, comunque dirette nello spazio. Ponendo già stabilito l' equilibrio del filo, la forza Pds e le due tensioni agenti nei punti estremi dell' arco ds, dovranno a vicenda equilibrarsi, e perciò giaceranno in un medesimo piano. Ma le due tensioni agendo secondo i due prolungamenti rettilinei di ds, dovranno giacere nel piano di questo archetto; dunque nel piano di curvatura di ds starà ancora la forza Pds.

E poichè la tensione T agente in un estremo dell'arco ds, la tensione $T+dT$ agente nell' altro estremo e la forza Pds debbono essere in equilibrio, lo saranno ancora le loro componenti secondo tre assi rettangolari. Perciò, chiamando X, Y, Z le componenti della forza P, ed in conseguenza Xds, Yds, Zds quelle di Pds; ed indicando con U, V, W le analoghe componenti di T, le quali diverranno $U+dU$, $V+dV$, $W+dW$ rispetto alla tensione $T+dT$; dovranno esser soddisfatte le equazioni

$$\begin{array}{lcl} Xds+U+dU-U=0 & & Xds+dU=0 \\ Yds+V+dV-V=0 & \text{(ossia)} & Yds+dV=0 \quad (1) \\ Zds+W+dW-W=0 & & Zds+dW=0. \end{array}$$

Integrando queste equazioni e supponendo le costanti inerenti al segno $\int$, avremo

$$\int Xds+U=0,\ \int Yds+V=0,\ \int Zds+W=0,\ (2)$$

nelle quali espressioni sostituendo primieramente ad U, V, W i loro valori $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$; e poi eliminandone T, otterremo

$$\frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}, \qquad (3)$$

ch' esprimerà la richiesta condizione di equilibrio.

Eliminando i denominatori delle tre ultime equazioni, esse divengono

$$\begin{aligned} dx\int Yds - dy\int Xds &= 0 \\ dy\int Zds - dz\int Yds &= 0 \qquad (4) \\ dz\int Xds - dx\int Zds &= 0, \end{aligned}$$

e sotto questa forma esprimono le tre proiezioni della curva sopra i tre piani coordinati. E poichè una qualunque di esse è conseguenza delle altre due, così due di esse sono sufficienti ad esprimere la condizione di equilibrio del filo, quando le forze sono comunque dirette nello spazio. Che se poi le forze giacessero tutte in un solo piano, allora ponendo in esso due degli assi coordinati, basterebbe a significarne l'equilibrio quella delle tre equazioni che contenesse le corrispondenti variabili.

Combinando le equazioni (2) colle equazioni (3) egli è facile dedurne la proporzione

$$dx : dy : dz = U : V : W;$$

donde segue che U, V e W sono componenti di una forza diretta secondo l' elemento ds della curva formata dal filo, o in altri termini, che la tensione T va diretta secondo la tangente al punto in cui si considera agire, risultamento conforme all' idea di tensione.

In fine osserviamo che ciascuno degl' integrali $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ menando seco una costante arbitraria, ne avremo tre di queste, quando la curva di equilibrio sarà

piana ; ed il loro numero si eleverà a cinque , se la curva richiedesse due delle equazioni (4) ; dapoichè tre integrazioni saranno da farsi nel primo caso , e cinque nel secondo. Or queste costanti arbitrarie non potranno esser altrimenti determinate, se non per mezzo di un egual numero di equazioni di condizione. Poniamo , per esempio , che fossero date le coordinate di due punti pei quali la curva dovesse passare , e data ancora la lunghezza dell' arco interposto. Allora sostituendo le coordinate dei punti dati nell' unica equazione della curva piana o nelle due equazioni della curva non piana , si avranno due equazioni di condizione nel primo caso, e quattro nel secondo. E sia o pur no piana la curva , la nota lunghezza dell'arco interposto ai due punti dati somministrerà sempre una nuova equazione di condizione : così il numero di queste equazioni pareggerà sempre quello delle costanti arbitrarie.

91. Nella precedente ricerca delle generali condizioni di equilibrio di un filo flessibile non abbiamo supposto altro dato nelle direzioni delle forze Pds , se non quello di dover giacere ciascuna di esse nel piano di curvatura dell'elemento che ne costituisce il punto di applicazione ; dato , la cui idea si presenta al pensiero come immediatamente congiunta a quella di equilibrio. Ma ogni forza Pds, senza uscire dal piano di curvatura dell' arco ds potrà con questo elemento far degli angoli variabili tra 0° e 180°; ed a norma dei valori diversi di questi angoli produrre un diverso andamento nell' archetto a cui è applicata. Or questa parte, che le speciali direzioni delle forze Pds prendono nella determinazione della forma della curva , è implicitamente dichiarata nella dipendenza delle coordinate di ogni suo punto dai valori delle componenti Xds, Yds, Zds della forza Pds che vi è applicata; ma giova ch'essa sia veduta sotto una forma esplicita.

A tale obbietto siano ab e bc (*fig. 79*) le direzioni delle due tensioni T e T' agenti nei punti estremi dell'arco ds, e sia be quella della forza Pds che fa con bc l'angolo $cbe = \varphi$.

Poichè le forze T, T' e Pds si suppongono in equilibrio, dovranno essere pareggiate a zero le loro componenti secondo due assi qualunque condotti pel punto b di loro applicazione nel piano di curvatura dell' arco ds. Sia bc uno di questi assi, e stia l' altro nella perpendicolare elevata alla stessa retta dal punto b. Chiamando ω l'angolo infinitesimo formato dalla ab col prolungamento di bc, le direzioni di T, T' e Pds faranno colla stessa bc gli angoli $180^\circ+\omega$, 0° e φ; quindi l' equilibrio delle tre forze richiederà soddisfatte le due equazioni (n° 19)

$$P\cos\varphi ds - T\cos\omega + T' = 0$$
$$P\operatorname{sen}\varphi ds - T\operatorname{sen}\omega = 0.$$

E poichè $\cos\omega$ differisce da 1 per un infinitesimo di 2° ordine, ed è $\operatorname{sen}\omega = \frac{ds}{r}$ (indicando r il raggio di curvatura di ds), le due equazioni diverranno

$$P\cos\varphi ds + dT = 0.$$
$$P\operatorname{sen}\varphi ds - T\frac{ds}{r} = 0.$$

Or se pòniamo $\varphi = 90^\circ$, la prima delle due ultime equazioni ci darà $dT = 0$, quindi T costante; e dalla seconda avremo $P = T\frac{ds}{r}$, vale a dire ch' essendo le forze Pds normali alla curva del filo, ciascuna di esse dovrà essere inversamente proporzionale al raggio di curvatura dell' archetto a cui è applicata. E così troviamo riprodotte le condizioni di equilibrio ottenute direttamente nel n° 90.

92. Uno dei casi di speciale direzione delle forze Pds, e che merita un particolare esame, è quello di supporle ordinate in un sistema di forze parallele. Poniamo che allora l' asse delle y sia parallelo alla comune direzione delle forze; saranno nulle componenti X e Z delle forze P: quindi $\int Xds = A$, $\int Zds = B$, A e B disegnando due co-

stanti da determinarsi. In tal modo le equazioni (3) del n° 91 diverranno

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{\int Yds}=\frac{dz}{B},$$

donde

$$Az=Bx+C.$$

Vale a dire che la curva formata dal filo giacerà tutta in un piano parallelo all' asse delle y. E se faremo coincidere il piano delle xy con quello della curva, l' ultima equazione ci darà $z=0$, qualunque sia x; quindi $B=0$, $C=0$, e delle due equazioni esprimenti la curva di equilibrio del filo rimarrà la sola

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{\int Yds}.$$

Nella quale facendo $\frac{dy}{dx}=p$, avremo

$$\int Yds=Ap.$$

93. E se invece dell' intensità qualunque della forza Y poniamo in quest' ultima equazione il valore costante della gravità molecolare, la quale nelle piccole distanze orizzontali agisce in direzioni parallele; allora la curva di equilibrio del filo prenderà il nome di *catenaria*, perchè analoga a quella che formerebbe una catena di piccolissimi anelli eguali, la quale liberamente pendesse sospesa ai due anelli estremi.

Poniamo che il filo in tutta la sua lunghezza sia egualmente doppio e denso; che le y positive procedano dal basso in alto, e che g rappresenti il peso della sua unità di lunghezza: avremo $Y=-g$; quindi

$$\int Yds=-gs+C=Ap.$$

E se l' origine degli archi s sia posta nel punto in cui è

$p = 0$, vale a dire nel punto più basso della catenaria, poichè ivi la tangente alla curva è parallela all' asse delle x; saranno nulle ad un tempo s e p, ed in conseguenza sarà $C = 0$, e l'equazione della curva, ponendovi $h = -\frac{g}{A}$, diverrà

$$hs = p,$$

dalla quale si deduce

— 1° Che le lunghezze degli archi della catenaria variano in ragion diretta della tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente all' origine di essi forma con quella menata per l' altro estremo.

— 2° Che ad ogni coppia di valori eguali ed opposti di p corrispondendo una coppia di valori eguali ed opposti di s, la verticale condotta per l' origine degli archi sarà un asse di simmetria rispetto alla curva, e quindi l'origine degli archi sarà *vertice* di essa.

94. Chiamiamo ψ l' angolo che la tangente ad un punto qualunque della catenaria forma coll' asse delle y; avremo

$$p = \frac{dy}{dx} = cot.\psi;$$

Indi nell' equazione

$$dp = -\frac{d\psi}{sen^2\psi} = hds$$

poniamo successivamente i due valori di ds risultanti dalle relazioni

$$ds.sen\psi = dx, \quad ds.cos\psi = dy;$$

avremo

$$hdx = -\frac{d\psi}{sen\psi}, \quad hdy = -\frac{cos\psi d\psi}{sen^2\psi};$$

le quali integrate ci daranno

$$hx = c - \overset{e}{\log}.tang\tfrac{1}{2}\psi \;[1]\;, \quad hy = \frac{1}{sen\psi} + c'.$$

E poichè sono note le direzioni degli assi sul piano della curva, le costanti c e c' dipenderanno dalla scelta dell' origine. Determinando questa in modo che siano nulle c e c', avremo, ponendo $\psi = 90^\circ$, $x = 0$ $y = \frac{1}{h}$. Dunque l' origine giacerà sulla verticale condotta pel vertice della curva, e da esso disterà di $\frac{1}{h}$: così in questa costante avremo un *parametro*, e nell' asse delle x una *direttrice*.

Or eliminando ψ dalle due equazioni

$$hx = = \overset{e}{\log}\, tang\tfrac{1}{2}\psi \text{ ed } hy = \frac{1}{sen\psi} = \tfrac{1}{2}(tang\tfrac{1}{2}\psi + cot\tfrac{1}{2}\psi), \;[2]$$

avremo l' equazione della catenaria in coordinate rettangolari

$$y = \frac{1}{2h}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right).$$

95. Nell' equazione

$$hs = cot\,\psi = \tfrac{1}{2}(cot\tfrac{1}{2}\psi - tang\tfrac{1}{2}\psi) \;[3]$$

[1] $$\int\frac{d\psi}{sen\psi} = \int\frac{d\psi}{2sen\frac{1}{2}\psi cos\frac{1}{2}\psi} = \int\frac{cos\frac{1}{2}\psi}{sen\frac{1}{2}\psi}\cdot\frac{\frac{1}{2}d\psi}{cos^2\frac{1}{2}\psi}$$
$$= \int cot\tfrac{1}{2}\psi.d\,tang\tfrac{1}{2}\psi = \int\frac{d.tang\frac{1}{2}\psi}{tong\frac{1}{2}\psi} = \overset{e}{\log}\,tang\tfrac{1}{2}\psi.$$

[2] $$\frac{1}{sen\psi} = \frac{sen^2\frac{1}{2}\psi + cos^2\frac{1}{2}\psi}{2sen\frac{1}{2}\psi cos\frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{2}\left(\frac{sen\frac{1}{2}\psi}{cos\frac{1}{2}\psi} + \frac{cos\frac{1}{2}\psi}{sen\frac{1}{2}\psi}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(tang\tfrac{1}{2}\psi + cot\tfrac{1}{2}\psi).$$

[3] $$cot\,\psi = \frac{cos\psi}{sen\psi} = \frac{cos^2\frac{1}{2}\psi - sen^2\frac{1}{2}\psi}{2sen\frac{1}{2}\psi cos\frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{2}\left(\frac{cos\frac{1}{2}\psi}{sen\frac{1}{2}\psi} - \frac{cos\frac{1}{2}\psi}{sen\frac{1}{2}\psi}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(cot\tfrac{1}{2}\psi - tang\tfrac{1}{2}\psi).$$

sostituendo i valori di $cot\frac{1}{2}\psi$ e $tang\frac{1}{2}\psi$ dati dall' equazione

$hx = -\overset{e}{log}\, tang\frac{1}{2}\psi$, si ottiene

$$hs = \frac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right);$$

la catenaria è dunque rettificabile.

Inoltre, addizionando una volta le due equazioni

$$hy = \frac{1}{sen\psi}, \quad hs = cot\psi,$$

un' altra volta sottraendo la 2^a di esse dalla 1^a, si avranno i due risultamenti

$$h(y+s) = cot\tfrac{1}{2}\psi = e^{hx}, \quad h(y-s) = tang\tfrac{1}{2}\psi = e^{-hx};$$

donde

$$h^2(y^2-s^2) = 1, \quad \text{ed } s^2 = y^2 - \frac{1}{h^2}.$$

Vale a dire che il quadrato di un arco della catenaria, il quale cominci dal vertice della curva, è eguale al quadrato della distanza dell' altro estremo dell' arco dalla direttrice, meno il quadrato del parametro.

E se nell' equazione

$$sds = ydy,$$

derivata dalla differenziazione di $s^2 = y^2 - \frac{1}{h^2}$, noi poniamo il valore di s dedotto dall' equazione $hs = \frac{dy}{dx}$, avremo

$$hydx = ds,$$

quindi

$$h\int ydx = s.$$

Or $\int_0^x y dx$ esprime la superficie compresa tra l' arco BM della catenaria *(fig. 81)*, le due ordinate AB ed Mn, e la direttrice Ax; dunque la superficie $ABMn$ sarà proporzionale all' arco $BM = s$.

96. Poichè nella catenaria, come ancora nella curva che risulterebbe supponendo il filo sottoposto ad un sistema di forze parallele molecolari, diverso da quello della gravità, l' azione delle forze, condotta mercè l' attrazione molecolare fino ai capi estremi del filo, viene ivi equilibrata dalla resistenza che vi trova; così verrà prodotta in tutta la lunghezza del filo una certa tensione che potremo valutare per mezzo delle equazioni (1) del n° 90.

Chiamando U e V le componenti della tensione T secondo le x e le y, quelle equazioni insieme coll' altra (n° 92)

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int . ds}$$

ci daranno

$$U = -\int X ds = -A\ ,\ V = -\int Y ds = -A\frac{dy}{dx}.$$

Dunque la componente della tensione secondo le x sarà costante per tutti i punti della curva, e quella secondo le y sarà direttamente proporzionale alla tangente trigonometrica dell' angolo che la tangente alla curva forma coll' asse delle x. Or facendo $\frac{dy}{dx} = p$, avremo la tensione risultante

$$T = -A\sqrt{1+p^2} = -A\frac{ds}{dx} = -A\frac{1}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{A}{sen\psi},$$

chiamando ψ l' angolo che la tangente forma coll' asse delle y. Dunque la tensione in un punto qualunque del filo sarà inversamente proporzionale al seno dell' angolo che la tan-

gente alla curva nello stesso punto farà colla direzione delle forze parallele. Così rappresentando AB *(fig. 80)*, una retta parallela alle forze, e quindi all' asse delle y (n° 92), le tensioni nei punti m ed n saranno inversamente proporzionali ai seni degli angoli CAB, CBA; ossia in ragione diretta dei lati CA e CB del triangolo ACB, formato dalle tangenti nei punti m ed n e dalla retta AB parallela all'asse delle y.

Or applicando la formola generale del valore di T al caso della catenaria, rispetto alla quale abbiamo (n° 93) $A = -\frac{g}{h}$, avremo

$$T = \frac{g}{h}\sqrt{1+p^2};$$

e poichè (n° 93) $p = hs$, sarà

$$T^2 = \frac{g^2}{h^2}(1+h^2s^2) = \tau^2+g^2s^2,$$

facendo $\tau^2 = \frac{g^2}{h^2}$. Vale a dire che la tensione minima sarà nel vertice, poichè ivi si ha $s = 0$; e poichè gs è il peso dell' arco s, la differenza tra i quadrati delle tensioni nel vertice ed in un punto qualunque della catenaria sarà eguale al quadrato del peso dell' arco interposto.

Allo stesso risultamento si poteva ancora pervenire mercè il principio che l' equilibrio di un sistema di forze non è turbato, quando movendole parallelamente a loro stesse si riducono a convergere tutte in un punto. Quindi trasportando nel vertice B *(fig. 81)* e parallelamente a loro stessi il peso gs dell' arco s e la tensione T che ha luogo nel punto M, durerà tuttavia l' equilibrio tra T, gs e τ, e perciò sarà $T = \sqrt{\tau^2+g^2s^2}$. Donde poi segue che conoscendo il peso Bg dell' arco BM, e la tensione Bt nel vertice B, sarà facile condurre una tangente nel punto M, essendo essa parallela alla diagonale Bk del rettangolo tBgk.

97. Sostituendo ancora nell' equazione

$$T = \frac{g}{h}\sqrt{1+p^2}$$

a p il suo valore $cot\,\psi$ (n° 94), avremo

$$T = \frac{g}{h}\sqrt{1+cot^2\psi} = \frac{g}{h}\cdot\frac{1}{sen\psi} = gy.$$

Or gy è il peso della lunghezza y dello stesso filo formante la catenaria; perciò l' equilibrio del filo BMN non sarà turbato, se fatto libero l' estremo N e piegando il filo per la gola di un' infinitesima girella fermata in M, si faccia pendere il capo MN fino a toccare la direttrice in un punto n. Laonde un filo EAVBD *(fig. 82)* semplicemente poggiato sulle gole di due pulegge fisse ed infinitamente piccole A e B, e coi capi AE e BD liberamente pendenti, starà in equilibrio quando i punti estremi E e D giaceranno in una medesima orizzontale ED, che sarà la direttrice della catenaria formata dalla porzione AVB compresa tra le due pulegge.

Dal quale teorema poi segue che girando un filo continuo intorno a due pulegge infinitesime A e B, le catenarie AVB, AV'B formate dal filo avranno una stessa direttrice ED. Ed in vero essendo eguali le tensioni rispetto alle due catenarie nei punti A e B, quelle porzioni di filo liberamente pendenti che facessero equilibrio alle tensioni di una catenaria nei detti punti, terrebbero in equilibrio anche le tensioni dell' altra; e perciò l' orizzontale ED che sia direttrice dell' una, lo sarà anche dell' altra.

Osserviamo inoltre ch' essendo D il piede della perpendicolare abbassata dal punto B sulla direttrice ED, ed essendo V e V' i vertici delle due catenarie formate dal filo continuo, avremo (n° 95)

$$\overline{AE}^2 - \overline{AV}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BV}^2$$
$$\overline{AE}^2 - \overline{AV'}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BV'}^2 ;$$

donde

$$\overline{AV}^2 - \overline{BV}^2 = \overline{AV'}^2 - \overline{BV'}^2,$$

ossia

$$(AV+VB)(AV-BV) = (AV'+BV')(AV'-BV').$$

Or se dal punto A' conduciamo la orizzontale AC, questa intersecherà le due catenarie nei punti C' e C, ed avremo (n° 93) $BC = BV - AV$, $BC' = BV' - AV'$; i quali valori sostituiti nell' ultima equazione ci daranno

$$AVB.BC = AV'B.BC'.$$

Vale a dire che le lunghezze delle due catenarie formate dal filo continuo staranno in ragione inversa degli archi BC e BC' determinati dall' orizzontale AC.

98. Applicando l' equazione (n° 91) $P sen \varphi = \frac{T}{r}$ alla catenaria, rispetto alla quale abbiamo $P = g$, $\varphi = \psi$, si ottiene

$$r = \frac{T}{g sen \psi} = \frac{T^2}{g T sen \psi} = \frac{T^2}{g \tau},$$

essendo $\tau = T sen \psi$. È dunque il raggio di curvatura della catenaria direttamente proporzionale al quadrato della tensione. Perciò essendo nel vertice della curva $T = \tau$, sarà $r = \frac{\tau}{g}$; ma $\tau = g \frac{1}{h}$ (n° 96); dunque $r = \frac{1}{h}$, vale a dire che il raggio di curvatura nel vertice della curva è eguale al parametro.

99. Dall' equazione della catenaria

$$y = \frac{1}{2h}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right)$$

si rileva ch' essendo data la costante h saranno noti tutti gli elementi che servono all' esatta definizione della curva. Or il valore di h potrà dipendere dalla lunghezza del filo, e dal-

le coordinate dei punti M ed N (*fig. 81*), a cui sono fissi i capi estremi. Siano x ed y le coordinate An ed Mn del punto M, ed $x+a$, $y+b$ quelle del punto N; sia l la lunghezza del filo che ne pende, s la lunghezza dell' arco BM a contare dal vertice; sarà $s+l$ la lunghezza dell' arco BN. Avremo così (n° 95)

$$h(y+s)=e^{hx},\ h(y-s)=e^{-hx}$$

$$h(y+b+s+l)=e^{h(x+a)},\ h(y+b-s-l)=e^{-h(x+a)}$$

delle quali sottraendo le prime dalle seconde, risulteranno

$$\left.\begin{aligned} h(b+l)&=e^{hx}\left(e^{ha}-1\right),\\ h(b-l)&=e^{-hx}\left(e^{-ha}-1\right). \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Or moltiplicando l' una per l' altra queste due ultime equazioni, si ottiene

$$h^2(l^2-b^2)=e^{-ha}\left(e^{ha}-1\right)^2;$$

donde

$$h\sqrt{l^2-b^2}=e^{-\frac{1}{2}ha}\left(e^{ha}-1\right)=e^{\frac{1}{2}ha}-e^{-\frac{1}{2}ha}.$$

E svolgendo in serie le due esponenziali, e dividendo per ha i due membri dell' equazione, avremo

$$\frac{\sqrt{l^2-b^2}}{a}=1+\frac{h^2a^2}{1.2.3.2^2}+\frac{h^4a^4}{1.2.3.4.5.2^4}+\ldots$$

che ci farà conoscere h per mezzo di a, l e b. Indi avremo x mercè una delle equazioni (a); e sostituendone il valore nell' equazione della catenaria, otterremo y. Così verrà fissata l' origine, e la curva potrà esser costruita per punti.

Or dall' ultima equazione, ch' esprime la dipendenza di h da a, l e b, si rileva che il parametro della catenaria ed in conseguenza la forma della curva rimarranno costanti, quando lo siano a e $\sqrt{l^2-b^2}$; ciò che può aver luogo con diverse lunghezze di filo e diverse posizioni dei due punti fissi. Ed in vero, immaginando fermati al punto A (*fig. 83*) i capi di più fili AB, AC, AD, AE che vadano tesi a diversi punti di una stessa verticale DE; e movendo A in M lungo una orizzontale giacente nel piano ADE, si avranno dai diversi fili altrettante catenarie, le quali avranno uno stesso parametro, poichè uno stesso valore di a e $\sqrt{l^2-b^2}$ appartiene a tutti i fili. Osserviamo inoltre che i vertici S, S', S'',... stanno sopra una simile catenaria, che ha il vertice in M.

100. Finalmente osserviamo rispetto alla catenaria, come per mezzo delle due equazioni (n[i] 95 e 93)

$$s^2 = y^2 - \frac{1}{h^2} \ (1), \quad hs = \frac{dy}{dx} \ (2)$$

sia facile definire le coordinate del centro di gravità di un arco qualunque di essa curva. Primieramente nell' equazione (1) differenziata

$$sds = ydy \ (3)$$

sostituendo ad s il suo valore tratto dall' equazione (2), si ottiene

$$ydx = \frac{1}{h}\,ds\,;$$

la quale moltiplicata per l' equazione (3) ci dà

$$sdx = \frac{1}{h}\,dy. \qquad (4)$$

Inoltre moltiplicando per s i due membri dell' equazione (3), abbiamo

$$ysdy = s^2ds = \left(y^2 - \frac{1}{h^2}\right)ds = y^2ds - \frac{1}{h}\,ydx\,,$$

ossia

$$sdy = yds - \frac{1}{h}\, dx.$$

Aggiungiamo yds ai due membri di quest'ultima equazione, ed avremo

$$yds + sdy = 2yds - \frac{1}{h}\, dx\ ;$$

vale a dire

$$d(ys) = 2yds - \frac{1}{h}\, dx\ ;$$

donde

$$yds = \tfrac{1}{2}\left(d(ys) + \frac{1}{h}\, dx\right). \qquad (5)$$

Or le coordinate x_1, y_1 del centro di gravità di un arco s_1 di curva piana sono date dalle due equazioni (n° 37)

$$x_1 s_1 = \int xds = xs - \int sdx\ ,$$

$$y_1 s_1 = \int yds.$$

Sostituendo nella prima il valore di sdx dato dall'equazione (4), e nella seconda quello di yds dato dall'equazione (5), avremo

$$x_1 s_1 = xs - \frac{1}{h}\, y + c$$

$$y_1 s_1 = \tfrac{1}{2}\left(ys + \frac{1}{h} x\right) + c';$$

i quali integrali, presi tra limiti convenienti al problema, daranno i valori di x_1 ed y_1.

101. Il centro di gravità della catenaria gode della proprietà di essere il più basso tra quelli di tutte le curve isoperimetre terminate ai medesimi punti fissi. Ed in vero poichè facendo comunque divergere la forma della catena da quella della curva che ne prende il nome, noi osserviamo costantemente che essa vi ritorna ; sarà d'uopo conchiudere

che sotto questa forma la catena perviene al suo equilibrio stabile: e perciò (n° 83) la distanza del suo centro di gravità dal piano orizzontale, condotto pel più alto dei punti fissi, dovrà essere un *massimo*.

Or poniamo che i due punti fissi si trovino sopra una stessa orizzontale, e che intorno a questa linea si faccia girare la catenaria. Verrà così generata una superficie di rotazione, il cui valore sarà (n° 49)

$$2\pi y_1 . s\ ,$$

indicando y_1 l'ordinata del suo centro di gravità rispetto all'orizzontale dei punti di sospensione, riguardata come asse delle x. E poichè y_1 è massima nella catenaria; così questa curva tra tutte le isoperimetre sarà quella che produrrà la massima superficie di rotazione.

102. Finora abbiamo supposto che il filo pesante pendesse liberamente dai suoi estremi fissi: poniamo in vece che il filo giacesse sopra un piano inclinato alla verticale sotto un certo angolo φ. Allora g varierà nel rapporto di $1 : cos\varphi$; e poichè h non dipende che da a, l e b, così la forma della curva resterà invariata, qualunque inclinazione alla verticale abbia il piano del filo.

Non sarà purtuttavia lo stesso della tensione; dapoichè essendo $h = -\frac{g}{A}$ (n° 93) e $T = -A\sqrt{1+p^2}$ (n° 96), se g acquista il fattore $cos\varphi$, lo stesso fattore dovrà essere aggiunto ad A, affinchè h rimanga costante; e variando A nel rapporto di $1 : cos\varphi$, nella stessa ragione varierà ancora T. In conseguenza le tensioni nei punti similmente posti in due catenarie che differissero soltanto nell'inclinazione dei loro piani alla verticale, sarebbero in ragione dei coseni di esse inclinazioni.

103. Se le forze parallele agenti sulle singole molecole del filo, in vece di essere proporzionali all'elemento della curva, fossero in ragione della proiezione di esso elemento

sopra una retta giacente nel piano della curva e perpendicolare alla direzione delle forze; allora togliendo questa retta ad asse delle x, le forze elementari sarebbero espresse da Pdx. Immaginiamo, a modo di esempio, una verga prismatica pq (*fig. 84*) fisicamente omogenea, sospesa per mezzo d' innumerevoli fili alla corda flessibile ab, fissa nei punti a e b: ogni elemento is della corda sarebbe allora tratto da un peso proporzionale alla sua proiezione orizzontale nt. In tale ipotesi l' equazione generale

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds},$$

ponendovi $Y = -g$, diverrà

$$A dy = -g x dx,$$

donde

$$A y = -\tfrac{1}{2} g x^2 + C.$$

La curva di equilibrio è dunque una parabola, il cui asse è verticale; e la sua equazione diverrà

$$x^2 = 2my,$$

supponendo l' origine sulla curva, e facendo $-\frac{A}{g} = m$.

La tensione in ogni punto della curva sarà espressa (n° 91) da

$$T = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{A^2 + g^2 x^2};$$

quindi minima nel vertice, che n' è il punto più basso, e massima nei punti fissi, i quali avranno eguali tensioni, quando giaceranno sulla stessa orizzontale.

Questa ipotesi di equilibrio nella curva funicolare trova un' importante applicazione nella costruzione dei ponti sospesi a catene di ferro.

CAPO DECIMO.

Dell' elasticità e dell' equilibrio nei fili elastici.

Le forze molecolari in quanto agli effetti meccanici sono comparabili ad ogni altra forza di simil natura — Ogni corpo è compressibile, estensibile ed elastico — Misura della forza di elasticità — Equilibrio di più forze applicate ad un sistema di punti elasticamente uniti. Calcolo delle alterazioni prodotte nelle loro distanze indipendenti — Condizioni di equilibrio di un filo elastico per trazione, animato in tutti i suoi punti da forze comunque dirette nello spazio — Applicazione di questa teorica alla catenaria — Misura dell' allungamento prodotto in un filo elastico da una nota quantità di trazione. Applicazione che può farsene alla misura della variazione della gravità terrestre secondo i diversi luoghi. — Elasticità per flessione — Curva di equilibrio di un filo elasticamente flessibile, animato in tutti i suoi punti da forze agenti in un medesimo piano — Differenza delle condizioni di equilibrio di un filo perfettamente flessibile da quelle di un filo elastico per flessione — Curva elastica. Sue proprietà — Equazione della curva elastica nell' ipotesi di una flessione piccolissima. — Elasticità della retta — Curva elastica circolare.

104. I risultamenti delle ricerche sulle densità dei corpi, congiunti ad altri fenomeni fisici ch' essi presentano, hanno dichiarato che le loro molecole sono separate da intervalli tali che anche nell' ipotesi di una perfetta omogeneità fisica sarebbero grandissimi in comparazione del diametro di esse molecole. Intanto tutti i corpi resistono alle forze che tendono a far variare i loro intervalli molecolari ; ed alcuni tra essi, i solidi, resistono ancora alle forze che rispettando la grandezza delle distanze tra l'una e l'altra molecola, tendono a far variare le semplici relazioni di sito. L' ordinamento molecolare di un corpo è dunque determinato dall' azione di forze, donde sono animate le sue minime particelle ; ed in conseguenza sarà tanto meno alterabile, per quanto sarà maggiore l' energia delle forze produttrici. Perciò se queste fossero così grandi che ogni altra forza meccanica dovesse riuscire infinitesima al paragone, avremmo

allora quella stabilità molecolare, che costituirebbe la rigidezza assoluta del corpo. Ma un tal concetto mancando di realtà obbiettiva, dobbiamo ammettere che le forze molecolari in quanto agli effetti meccanici sono comparabili ad ogni altra forza che potrebbe esservi applicata.

105. Questa comparabilità delle forze molecolari a quelle che possono esservi impresse mena necessariamente alla conseguenza, daltronde rifermata da sperimenti, che sotto l'azione delle forze esterne gl'intervalli, donde sono separate le minime particelle di un corpo, possono essere aumentati o diminuiti, secondo che le cagioni perturbatrici agiscono traendo o premendo. Sarà dunque ogni corpo compressibile ed estensibile; e poichè le forze molecolari son continue, esse dovranno tendere a far ritornare le molecole verso le loro naturali posizioni di equilibrio, appena sarà cessata l'azione della forza perturbatrice: ogni corpo sarà dunque ancora elastico. L'esperienza ha rifermato l'esattezza di questa illazione, dichiarando che un grado di elasticità esiste in ogni aggregato materiale, e che la sola quantità ne varia da un corpo all'altro.

106. Ciò che rende varia l'elasticità nei varî corpi, si è l'ampiezza delle escursioni dai naturali luoghi di equilibrio, alle quali le molecole possono soggiacere senza che resti lesa la continuità della massa (come nei corpi rigidi), o che le molecole perdano la tendenza di ritornare a proprî luoghi, come nei corpi molli. E se tra questi limiti di elasticità venga attuata mercè cagione meccanica un'alterazione nel coordinamento molecolare di un corpo, egli è evidente che la quantità di forza elastica che n'è messa in azione, debba pareggiare quella della forza cui tiene in equilibrio. Or nei corpi, come i fili metallici, nei quali facilmente si è potuta misurare l'alterazione prodotta, tra i limiti di elasticità, da trazione o da torcimento, la si è trovata proporzionale all'energia della forza perturbatrice [1];

[1] Ved. il capo 3° del libro III della mia Fisica 2ª edizione.

possiamo dunque ammettere come dato sperimentale la proporzionalità della forza elastica alla quantità dell'alterazione prodotta. Perciò chiamando x quest' ultima quantità di sua natura variabile, ed E un fattore costante, *coefficiente di elasticità,* dipendente dalla speciale natura del corpo; sarà Ex l' elasticità svolta in conseguenza dell' alterazione x.

107. Or immaginiamo due punti materiali A e B tra essi elasticamente congiunti: sia al punto A applicata una forza P, al punto B una forza Q; e di queste due forze cerchiamo la condizione di equilibrio. Considerando come positiva la direzione da A a B, agiranno sul punto A la forza P e l' opposta elasticità Ex, e sul punto B le due forze eguali ed opposte Q e $-Ex$. Avremo così

$$P+Ex=0\ ,\quad Q-Ex=0,$$

le quali due equazioni addizionate insieme ci danno

$$P+Q=0.$$

Immaginiamo ancora tre punti A, B, C giacenti sopra una stessa retta ed in modo da esservi congiunzione elastica tra A e B, B e C, A e C; e ad essi siano rispettivamente applicate le forze P, Q, R. Considerando la congiunzione elastica di A con B, agiranno sul primo punto le forze P ed Ex, e sul secondo le forze Q e $-Ex$; similmente rispetto all' unione di B con C, avremo in B le forze Q ed $E'y$, R e $-E'y$ in C; ed in fine, attesa la congiunzione elastica di A con C, agiranno in A le forze P e $E''(x+y)$, ed in C le forze R e $-E''(x+y)$. Laonde agiranno in A le forze P, Ex, $E''(x+y)$, in B le forze Q, $E'y$, $-Ex$; in C le forze R, $-E'y$, $-E''(x+y)$. Il loro equilibrio richiederà dunque che siano soddisfatte le tre equazioni,

$$P+Ex+E''(x+y)=0,\ Q-Ex+E'y=0,\ R-E'y-E''(x+y)=0,$$

che addizionate insieme danno

$$P+Q+R=0\ ;$$

ed in conseguenza della quale relazione si troverà facilmente che ognuna delle tre equazioni non è che la somma delle altre due ; e perciò realmente esse non sono che due , dalle quali sarà poi agevole dedurre

$$x=\frac{QE''-PE'}{EE'+EE''+E'E''}\ ,\ y=\frac{RE-QE''}{EE'+EE''+E'E''}\ ,$$
$$x+y=\frac{RE-PE'}{EE'+EE''+E'E'}\ .$$

Quindi le alterazioni x, y, $x+y$, che in conseguenza delle azioni delle forze impresse saranno avvenute nelle distanze dei punti di applicazione, e le trazioni o pressioni ivi generate, verranno espresse in funzione delle forze applicate e dei coefficienti di elasticità.

Ed in generale supponendo n forze P, Q, R,... applicate ad n punti giacenti in linea retta e tutti a vicenda dipendenti per elastica unione, l' equilibrio delle n forze richiederà soddisfatte n equazioni di condizione, le quali (poichè la loro somma darà $P+Q+R+\ldots=0$) si ridurranno ad $n-1$, atte a far determinare le alterazioni avvenute nelle $n-1$ distanze indipendenti degli n punti. Conosciute le quali alterazioni , saranno note tutte le altre relative alle distanze dipendenti, e quindi le trazioni o pressioni avvenute negli n punti.

Se il sistema degli n punti fosse stato assolutamente rigido, queste trazioni o pressioni (n° 62) sarebbero restate in massima parte incognite, perchè mancanti di condizioni atte a farle determinare ; mentre l' ipotesi di un' elasticità nota conduce direttamente alla loro determinazione. Nè ciò ha luogo soltanto rispetto a punti giacenti in linea retta , ma per punti ancora che siano ordinati in un piano , od anche nello spazio. Ed in fatti , supponendo che le forze ed i loro n punti di applicazione siano in un medesimo piano , l' equilibrio tra la forza applicata ad ogni punto e le forze elastiche ivi svolte richiederà soddisfatte 2 equazioni di con-

dizione, ed in conseguenza nella totalità degli n punti si avranno $2n$ equazioni. Ma poichè le forze elastiche dovranno a vicenda equilibrarsi [1], l' equilibrio del sistema richiederà quello delle forze applicate, ed in conseguenza dovranno esser soddisfatte (n° 51) 3 equazioni di condizione, le quali poi ridurranno le $2n$ equazioni a $2n-3$. Or questo numero è precisamente quello delle distanze indipendenti tra n punti in un piano [2]; saranno dunque determinabili le alterazioni di queste distanze, e quindi le pressioni o trazioni sofferte dai punti di applicazione.

Rispetto poi alla giacitura dei punti nello spazio, l' equilibrio di ciascuno di essi richiedendo soddisfatte 3 equazioni di condizione, avremo per n punti $3n$ equazioni; e poichè l' equilibrio tra le sole forze impresse suppone l' esistenza di 6 equazioni, così delle prime ne resteranno $3n-6$, suffi-

[1] Immaginiamo un corpo elastico alterato nella sua forma naturale mercè azione permanente di forze impresse, e poniamo ancora che, tolte via queste, le molecole del corpo fossero ritenute nelle nuove loro posizioni per mezzo di legami inelastici. Rimarrebbero così intatte le forze elastiche svolte nella pertubazione del sistema molecolare; e perciò se queste forze non si facessero a vicenda equilibrio, in virtù della loro azione il corpo dovrebbe concepire movimento, ciò che ripugna ai dati di osservazione.

Donde poi segue che le condizioni di equilibrio di un sistema di forze debbano essere indipendenti dall' unione elastica o rigida dei loro punti di applicazione.

[2] Tra gli n punti $a, b, c, d,...$ prendendone due qualunque a e b, ciascuno dei rimanenti $n-2$ punti presenterà due distanze indipendenti ca cb, da db, ec. Vi saranno dunque $2(n-2)=2n-4$ distanze indipendenti degli $n-2$ punti da a e b: aggiuntavi la distanza anche indipendente ab, ne avremo l'intero numero espresso da $2n-3$.

Se i punti giacessero comunque nello spazio, allora ne prenderemmo tre a, b, c; e ciascuno dei rimanenti $n-3$ avendo tre distanze indipendenti da a, b, c, gli $n-3$ ne avranno $3(n-3)=3n-9$; a cui aggiungendo le tre distanze anche indipendenti ab, ac, bc, il loro numero si eleverà a $3n-6$.

cienti a far determinare le alterazioni prodotte nelle $3n-6$ distanze indipendenti tra n punti elasticamente ordinati nello spazio.

108. Limitandoci a considerare l' elasticità nei soli corpi filiformi, come quelli che nello stato attuale della scienza possono offrire un' applicazione alle teoriche elementari, osserviamo che il loro equilibrio molecolare può essere meccanicamente turbato di tre maniere diverse, la trazione, la flessione, il torcimento.

Supponiamo un filo egualmente denso ed elastico in tutta la sua lunghezza che facciamo $=1$; sia ancora $=1$ l'area della sua sezione; ed in fine poniamo che il filo si allunghi di una quantità e, quando fermato in un estremo, sia sottoposto nell' altro all' azione di una forza traente $=1$. È chiaro che un filo consimile che abbia la lunghezza l, la sezione a e sia tratto da una forza $=\mathrm{P}$, si allungherà di $\frac{l\mathrm{P}e}{a}$; dimodochè la lunghezza primitiva l diverrà $l\left(1+\frac{\mathrm{P}e}{a}\right)$ in conseguenza della trazione P. Or ammettiamo come dato sperimentale [1] che se un filo elastico si allunghi nella ragione di $1:1+\frac{\mathrm{P}e}{a}$, la sua densità viceversa dovrà diminuire nella ragione di $1+\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{P}e}{a}:1$. E seguendo questo principio cerchiamo le condizioni di equilibrio di un filo che elastico per trazione e perfettamente flessibile sia animato in ogni suo punto (x, y, z) dalle forze X, Y, Z.

Supponendo in ogni molecola del filo applicate queste tre forze parallele agli assi, nell' elemento ds avente la densità ρ e la sezione $=1$ agirebbero le forze $\mathrm{X}\rho ds$, $\mathrm{Y}\rho ds$, $\mathrm{Z}\rho ds$ se in conseguenza della tensione T ingenerata tra le molecole del filo non fosse avvenuto allungamento veruno. Ma avendo supposto il filo elasticamente distensibile, sotto la ten-

[1] Vedi la mia Fisica tom. 1. pag. 109.

sione T la sua densità sarà divenuta $\frac{\rho}{1+\alpha T}$, facendo $\alpha = \frac{e}{2a}$; quindi nelle espressioni delle forze applicate all'elemento ds bisognerà introdurre il fattore $\frac{1}{1+\alpha T}$, e l'equazioni di equilibrio date nel n° 91 diverranno

$$X\rho ds + (1+\alpha T)d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$Y\rho ds + (1+\alpha T)d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$Z\rho ds + (1+\alpha T)d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Dalle quali eliminando T, dopo averne eseguita l'integrazione, risulteranno due equazioni che in funzione delle forze applicate X, Y, Z, dell' elasticità e del filo e della sua sezione ne definiranno la curva di equilibrio.

Conosciuta mercè le equazioni precedenti la tensione T in ogni punto della curva, sarà facile determinare l' allungamento patito dal filo; poichè il suo elemento primitivo $d\sigma$ divenuto mercè la trazione sofferta $ds = d\sigma\,(1+\alpha T)$, ci dà

$$d\sigma = \frac{ds}{1+\alpha T},$$

donde per mezzo d' integrazione otterremo il valore di $s-\sigma$. Ma questa differenza potrebbe ancora esser data da una funzione immediata delle quantità da cui dipende. E in vero moltiplicando ordinatamente le tre equazioni precedenti per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; indi facendone l' addizione, avremo

$$X\rho dx + Y\rho dy + Z\rho dz + (1+\alpha T)\left(dT + \frac{d.ds^2}{ds}\right).$$

E poichè pel principio della proporzionalità delle forze all' elemento ρds del filo deve aversi ds come costante, sarà

$d.ds^2 = 0$; e la quantità compresa nella 2^a parentesi sarà ridotta al solo termine dT. Or elevando a quadrato l'equazione $d\sigma = \frac{ds}{1+\alpha T}$, indi differenziandola si ottiene

$$(1+\alpha T)dT = \frac{1}{2\alpha} d\left(\frac{ds^2}{d\sigma^2}\right)$$

perciò sostituendo avremo

$$X\rho dx + Y\rho dy + Z\rho dz + \frac{1}{2\alpha} d\left(\frac{ds^2}{d\sigma^2}\right).$$

109. Applichiamo questi principi alla ricerca dell'equazione della catenaria che dovrà rappresentare la curva di equilibrio di un filo pesante ed elasticamente estensibile fermato nei punti estremi. Questa curva, egualmente che nel caso del filo inestensibile, giacerà nel piano verticale condotto pei due punti fissi, e nel quale supporremo le y positive in direzione opposte a quella della gravità. Così avremo $Y = -g$, $X = 0$; e delle tre equazioni di equilibrio date nel n° precedente le due prime diverranno

$$(1+\alpha T)d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$g\rho ds = (1+\alpha T)d\left(T\frac{dy}{ds}\right);$$

la prima delle quali ci dà

$$T = A\frac{ds}{dx} = \frac{A}{sen\psi},$$

chiamando ψ l'angolo che la tangente alla curva nel punto (x, y) forma coll'asse delle y. Quindi sarà

$$1+\alpha T = 1 + \frac{A\alpha}{sen\psi},$$

e

$$T\frac{dy}{ds} = \frac{A}{sen\psi} \cdot cos\psi = A . cot\psi.$$

Perciò la 2ª equazione di equilibrio diverrà

$$g\rho ds = \left(1+\frac{A\alpha}{sen\psi}\right)d.Acot\psi\ ;$$

dalla quale, (essendo $dx = ds.sen\psi$, $dy = ds.cos\psi$,) risulteranno le due equazioni

$$g\rho dx = (sen\psi + A\alpha)d.Acot\psi$$
$$g\rho dy = (cos\psi + A\alpha cot\psi)d.Acot\psi\ ,$$

donde

$$g\rho x = \int sen\psi.d.Acot\psi + A^2\alpha cot\psi$$

e

$$g\rho y = \int cos\psi.d.Acot\psi + \tfrac{1}{2}A^2\alpha cot^2\psi.$$

E poichè $d.Acot\psi = -\frac{Ad\psi}{sen^2\psi}$, sarà

$$\int sen\psi.d.Acot\psi = -A\int\frac{d\psi}{sen\psi} = -A\overset{e}{log}\ tang\tfrac{1}{2}\psi$$ [1]

e

$$\int cos\psi.d.cot\psi = -A\int\frac{cos\psi d\psi}{sen^2\psi} = \frac{A}{sen\psi}\ ;$$

quindi

$$g\rho x = -A\overset{e}{log}\ tang\tfrac{1}{2}\psi + A^2\alpha cot\psi$$
$$g\rho y = \frac{A}{sen\psi} + \tfrac{1}{2}A^2\alpha cot^2\psi.$$

Non aggiungiamo costanti a questi due integrali, poichè egualmente che nella catenaria di un filo inestensibile supponiamo che a $\psi = 90^\circ$ corrisponda $x = 0$, ed $y = \frac{A}{g\rho}$.

Or per avere l' equazione tra le due sole variabili x ed y fa d' uopo eliminare ψ dalle due precedenti. Perciò, facen-

[1] Vedi la nota (1) a pag. 172.

do $g_p = \mathrm{A}h$, $\mathrm{A}\alpha cot\psi = -i$, $\frac{1}{2}\mathrm{A}\alpha cot^2\psi = -k$, avremo

$$hx+i = -\overset{e}{log}\,tang\tfrac{1}{2}\psi\ ,\ hy+k = \frac{1}{sen\psi} = -\tfrac{1}{2}(tang\tfrac{1}{2}\psi + cot\tfrac{1}{2}\psi)\ ;$$

donde

$$e^{hx+i} = cot\tfrac{1}{2}\psi\ ,\quad 2(yh+k) = e^{hx+i} + e^{-hx-i}$$

Poniamo che il filo, come d'ordinario avviene, sia poco estensibile sotto l'azione del proprio peso: sarà α una quantità piccolissima, e lo saranno in conseguenza i e k. Potremo dunque trascurare i termini che conterranno come fattori le potenze di i superiori alla 1ª; e perciò svolgendo in serie e^i ed e^{-i} avremo

$$e^i = 1+i\ ,\ e^{-i} = 1-i\ ;$$

quindi

$$2(hy+k) = e^{hx+i} + e^{-hx-i} = e^{hx}e^i + e^{-hx-i} = e^{hx} + e^{-hx} + i(e^{hx} - e^{-hx}) \cdot (a)$$

Daltronde abbiamo

$$cot\psi = \tfrac{1}{2}(cot\tfrac{1}{2}\psi - tang\tfrac{1}{2}\psi) = e^{hx+i} - e^{-hx-i} = e^{hx} - e^{-hx} + i(e^{hx} + e^{-hx})\ ;$$

della quale espressione trascurando l'ultimo termine come piccolissimo; sostituendo il valore di $cot\psi$, che ne risulta, nelle due equazioni donde dipendono i e k; e ponendo in fine i valori, che si otterranno di queste due grandezze, nell'equazione (a), avremo per equazione della catenaria elastica

$$2hy = e^{hx} + e^{-hx} - \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\alpha(e^{hx} - e^{-hx})^2.$$

La quale fa conoscere la curva dover essere simmetrica rispetto all'asse delle y, poichè mutando x in $-x$ la y rimane invariata.

L'allungamento poi patito dal filo per giungere al suo

equilibrio sarà dato dall' equazione (n° 108)

$$d\sigma = \frac{ds}{1+T\alpha} = ds(1-T\alpha)$$

limitandoci alla 1ª potenza di α. Ed avendo qui sopra trovato $T = A\frac{ds}{dx}$, sarà

$$d\sigma = ds - A\alpha\frac{ds^2}{dx} = ds - \alpha\frac{A}{sen\psi}ds.$$

Ma nell' equazione

$$g\rho y = \frac{A}{sen\psi} + \tfrac{1}{2}A^2\alpha cot^2\psi$$

trascurando il 2° termine del 2° membro nell' ipotesi di α quantità piccolissima, avremo $\frac{A}{sen\psi} = g\rho y$; quindi

$$d\sigma = ds - g\rho\alpha y ds,$$

donde

$$s - \sigma = \alpha g\rho\int y ds = \alpha g\rho\frac{\int y ds}{s}s.$$

Or $g\rho\frac{\int y ds}{s}$ rappresenta la y del centro di gravità dell' arco s. Dunque l' allungamento avvenuto in un arco della catenaria sarà direttamente proporzionale al prodotto della lunghezza dell' arco per la distanza del suo centro di gravità dalla direttrice.

110. Poniamo ora che il filo, mobile con uno degli estremi intorno ad un asse orizzontale, sia liberamente abbandonato al suo peso. È chiaro che la sua linea di equilibrio sarà la verticale condotta pel punto di sospensione ; e che il peso del filo produrrà in ogni punto della sua lunghezza una tensione eguale al peso della porzione sottostante. In conseguenza ponendo l' origine nell' estremo inferiore del filo , ogni punto che ne disti della quantità σ, soffrirà una

tensione $T = g\rho\sigma$; quindi l'equazione

$$ds = (1+\alpha T)d\sigma$$

diverrà

$$ds = (1+\alpha g\rho\sigma)d\sigma,$$

donde

$$s = (1+\tfrac{1}{2}\alpha g\rho\sigma)\sigma.$$

Perciò se σ rappresenta la lunghezza primitiva di tutto il filo, s disegnerà quella che avrà acquistato sotto l'azione del suo proprio peso.

Ma se l'estremo inferiore del filo fosse gravato di una massa M, la tensione di ogni suo punto distante della quantità σ dall' origine sarebbe

$$T = g(M+\rho\sigma),$$

e l' equazione tra la lunghezza aumentata s del filo e la lunghezza σ che aveva prima della trazione diverrebbe

$$s = \sigma + \alpha g\sigma(M+\tfrac{1}{2}\rho\sigma)\ ;$$

vale a dire che volendo considerare la parte che il peso del filo prende nell' allungamento prodotto dalla gravità di una massa addizionale, bisognerà aggiungervi la metà del peso di esso filo.

Or essendo noto che la gravità varia secondo le latitudini e le altezze dei luoghi, è chiaro che uno stesso filo trasportato in diversi punti della superficie terrestre richiederà un diverso valore di M, per allungarsi di una stessa quantità $s-\sigma$. Laonde se in due luoghi avremo determinato mercè saggi sperimentali i valori M ed M' da doversi dare alla massa addizionale, perchè si avesse una stessa quantità di allungamento $s-\sigma$, la loro sostituzione nell' equazione precedente farà rilevare la ragione delle forze corrispondenti di gravità g e g'; dapoichè avremo

$$g(M+\tfrac{1}{2}\rho\sigma) = g'(M'+\tfrac{1}{2}\rho\sigma)\ ;$$

quindi

$$g : g' = M' + \tfrac{1}{2}\rho\sigma : M + \tfrac{1}{2}\rho\sigma :$$

vale a dire che le forze di gravità nei due luoghi di osservazione saranno inversamente proporzionali alla grandezza delle cariche aumentate della metà del peso del filo.

Questo metodo di ricercare la variazione della gravità terrestre fu escogitato dall' illustre John Herschel ; ma egli è facile prevedere che la sua attuazione presenterebbe difficoltà non inferiori a quelle che s' incontrano nel noto metodo delle oscillazioni di un pendolo.

111. L' elasticità può ancora manifestarsi nei corpi filiformi come tendenza a riprendere la forma primitiva alterata per mezzo di flessione. Poniamo che essendo rettilinea la forma primitiva, la flessione tenga piegato il filo sotto l'angolo ABC (*fig. 85*); la forza elastica allora spingerà ciascuno dei lati dell'angolo a rimettersi nel prolungamento dell' altro. E se rimossa la cagione perturbatrice della forma primitiva del filo, questo fosse nondimeno costretto a durare nell' inflessione angolare , perchè ritenuto dal filo inestensibile mn ; allora la forza elastica pareggerà la tensione sofferta nei punti m ed n dal filo congiungente. E se in vece della congiunzione mn fossero nella stessa linea applicate ai lati dell' angolo due forze opposte ed eguali alle tensioni nei punti m ed n , l'effetto sarebbe lo stesso ; e ciascuna di queste forze sarebbe equivalente all' elasticità del filo.

Le forze che applicate in due punti qualunque dei lati AB e BC dovranno equilibrarne l' elasticità , dovendo essere tra loro eguali ed opposte, avranno eguali ed opposti momenti rispetto al vertice B dell' angolo ; perciò conosciuto uno di questi momenti, basterà mutargli il segno per avere il valore dell' altro. E quando insieme al valore u del momento siano date ancora la direzione mn della forza e la distanza Bm del suo punto di applicazione dal vertice B, potremo de-

terminare l' intensità di essa forza mercè la relazione

$$F = \frac{u}{Bm.\text{sen}Bmn}.$$

112. Mercè queste semplicissime considerazioni possiamo applicare all' ipotesi di una flessibilità elastica le equazioni che abbiamo trovato come condizioni di equilibrio di un filo perfettamente flessibile. Poniamo primieramente che il filo sia inflesso nella curva piana ABC... DEF (*fig. 86*) sotto l' azione delle forze esterne Xds, Yds agenti nello stesso piano. Or se alle forze elastiche che tendono riordinare nella prima forma tutti gli elementi AB, BC, ec. della curva, noi sostituiamo le loro equivalenti applicate ai lati degli angoli formati da ciascun elemento con quello che immediatamente lo segue, potremo allora riguardare il filo come perfettamente flessibile non avendovi a considerare che sole forze esterne. A tale obbietto, integrando per parti l' equazione (n° 91)

$$dy\int Xds - dx\int Yds = 0,$$

che rappresenta la condizione di equilibrio di un filo perfettamente flessibile animato in tutti i suoi punti da forze contenute in un medesimo piano, avremo

$$y\int Xds - \int yXds - x\int Yds + \int xYds = 0.$$

Or le coordinate y ed x, che in quest' ultima espressione si trovano fuori dei segni sommatori, appartengono al punto della curva fino al quale si è estesa l' integrazione, già cominciata da $x = 0$ e $y = 0$; mentre le x ed y che stanno sotto il segno $\int$ appartengono a tutti i punti intermedi della curva. Chiamando dunque y' ed x' le coordinate del punto fino al quale s' intendono estesi gl' integrali, l' equazione precedente potrà prendere la forma

$$\int\left((x-x')Yds - (y-y')Xds\right) = 0,$$

sotto la quale essa esprime che la somma dei momenti delle forze rispetto al punto (y', x') è nulla. E poichè l'elasticità del filo può esser sostituita da un sistema di forze applicate ai diversi elementi della curva da esso formata; così l'ultima equazione converrà ancora ad un filo elasticamente flessibile, quando avremo aggiunto al suo primo membro la somma dei momenti delle forze equivalenti alla reazione elastica. Or dall' origine A della curva fino al punto E a cui s' intendono estesi gl' integrali, queste ultime forze saranno a due a due eguali ed opposte, quindi la somma dei loro momenti sarà nulla rispetta al punto E, come ad ogni altro punto del piano. Resta purtuttavia la reazione dell' angolo DEF, la quale insieme all' altra dell' angolo formato dall' elemento DE con quello che immediatamente lo precede, determina il sito dello stesso elemento DE. Or egli è chiaro che il luogo di quest' ultimo elemento sarebbe fissato, se lo fosse quello di EF; vale a dire se la somma dei momenti rispetto al punto E di tutte le forze applicate al filo da A in E fosse eguale ed opposta alla reazione elastica dell' elemento EF. Laonde chiamando u questa reazione, l' equazione di equilibrio di un filo elasticamente flessibile ed animato in tutti i punti da forze agenti in un medesimo piano, sarà

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = u.$$

Il momento u, essendo variabile da un punto all' altro della curva, dovrà essere una funzione delle coordinate di esso punto. Chiamando ψ l'angolo che l'elemento DE forma coll' asse delle x, l'elemento EF vi farà l' angolo $\psi - d\psi$; sarà quindi $d\psi$ l' inclinazione dei due elementi. Or lasciando costante la lunghezza degli elementi della curva, e costante il punto di applicazione della forza che tien luogo dell' elasticità, è chiaro che il momento u dovrà variare similmente a $d\psi$: potremo dunque, seguendo l' ipotesi più semplice, stabilirlo proporzionale a $d\psi$; e poiche l' equazione precedente dimostra esser u una quantità finita, fare-

mo il fattore della proporzionalità $= \frac{k}{ds}$, ed avremo

$$u = k\,\frac{d\psi}{ds} = \frac{k}{r}\,;$$

quindi l' equazione di equilibrio del filo elastico sarà

$$(a) \qquad \int dy \int \mathrm{X}ds - \int dx \int \mathrm{Y}ds = \frac{k}{r}\,;$$

vale a dire che la somma dei momenti delle forze applicate dall' origine fino al punto (x, y) dovrà essere direttamente proporzionale alla curvatura del filo in quel punto.

113. Se la curva AB...DEF *(fig. 86)* fosse costituita da un filo perfettamente flessibile, e che tolto via l'arco DEF, si volesse tuttavia in equilibrio la rimanente porzione AB... CLD, basterebbe rendere immobile il punto estremo D dell' elemento LD, ovvero applicarvi una forza eguale ed opposta alla tensione che vi avrebbe luogo. Ma in un filo elasticamente flessibile questa condizione non è sufficiente alla conservazione dell' equilibrio; dapoichè sull' elemento LD non agisce soltanto la tensione applicata in D, ma ancora una delle due forze rappresentanti la reazione elastica dell' angolo LDE, e che può essere applicata in un punto qualunque di LD. Quindi e questa forza e la tensione applicata in D dovranno esser equilibrate, affinchè l' arco AB...LCD rimanga inalterato dopo averne tolto l' arco DEF.

La tensione e la reazione elastica agenti sull' elemento LD possono in generale comporsi in una risultante R, le cui componenti secondo gli assi saranno $-\int \mathrm{X}ds$, $-\int yds$; poichè l' equilibrio della restante porzione di filo dovendo durare ancorchè l' arco AB...CLD divenisse rigido, la forza R dovrà essere eguale ed opposta alla risultante di tutte le forze applicate al filo dall'origine A fino all'estremo D. Inoltre essendo u la somma dei momenti delle forze $\int \mathrm{X}ds$ ed $\int yds$, sarà $-u$ il momento della forza R, la quale in conseguenza di que-

ste relazioni sarà compiutamente determinata in grandezza e direzione.

Ogni punto della direzione di R, il quale sia invariabilmente congiunto coll' elemento LD potendosi riguardare come il suo punto di applicazione; noi la supporremo applicata al punto in cui la sua direzione interseca la tangente all' elemento LD, ed ivi decomposta in due, l' una T nel senso della tangente, l' altra N secondo una perpendicolare alla prima. Faccia la tangente coll'asse delle x l'angolo ψ, e sia φ quello che vi forma la direzione di R; sarà $dx = \cos\psi ds$, $dy = \operatorname{sen}\psi ds$, $R\cos\varphi = -\int X ds$, $R\operatorname{sen}\varphi = -\int Y ds$; quindi

$$N = R.\operatorname{sen}(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int Y ds + \frac{dy}{ds}\int X ds = \frac{du}{ds};$$

e

$$T = \cos(\varphi - \psi) = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds.$$

La quale ultima forza sarà una tensione od una pressione; secondochè sarà positivo o negativo il suo valore.

Or se delle due equazioni (n° 91)

$$\int X ds + T\frac{dx}{ds} = 0, \quad \int Y ds + T\frac{dy}{ds} = 0,$$

che danno il valore di T in un filo perfettamente flessibile, ne moltiplichiamo la 1ª per $\frac{dx}{ds}$ e la 2ª per $\frac{dy}{ds}$ e poi ne addizioniamo i prodotti, avremo lo stesso valore di T qui sopra trovato: coincidenza necessaria, poichè la considerazione dell' elasticità, senz' alterare l' idea di tensione, fa semplicemente che vi aggiungiamo quella di una forza N perpendicolare alla tangente, e che dobbiamo supporre nulla nel caso di un filo perfettamente flessibile.

114. Se in vece di supporre delle forze applicate ai singoli punti di un filo elastico, immaginiamo che il primo e l' ultimo suo elemento siano resi immobili di un modo qua-

lunque, la linea che allora il filo disegnerà nel suo equilibrio, ha ricevuto il nome di *curva elastica.*

L'equazione di questa curva si deduce immediatamente dall'equazione (a) del n° 112, ponendovi $X=0$, ed $Y=0$; ciò che darà $\int X ds = A$, $\int Y ds = B$, A e B disegnando due costanti le quali rappresentano le componenti secondo gli assi della resistenza che uno dei due elementi estremi del filo incontra nell'ostacolo a cui è fermato. Ed estendendo gl'integrali dal punto (a, b) al punto (x, y), l'equazione della curva elastica sarà

$$B(a-x)-A(b-y)=\frac{k}{r}.$$

Or l'immobilità degli elementi estremi della curva può ottenersi ancora mercò l'applicazione di due forze eguali ed opposte alle pressioni ch'essi esercitano contro gli ostacoli a cui sono fermati; e poichè queste forze dovranno conservare l'equilibrio dell'intero filo del pari che quello delle sue singoli parti, così è necessario che siano tra esse eguali e direttamente opposte. Questa linea comune alle loro azioni dicesi *asse* della curva elastica; e se con esso facciamo coincidere quello delle x, diverranno nulle le due costanti B e b, e l'equazione precedente diverrà

$$Ay=\frac{k}{r}.$$

La curvatura in ogni punto della linea elastica è dunque direttamente proporzionale alla distanza del punto dall'asse; quindi nulla nei punti d'intersezione della curva coll'asse; e se la linea elastica fosse oltre protratta, il punto d'intersezione coll'asse sarebbe un punto d'inflessione, poichè ivi r egualmente che y passerebbe dal positivo al negativo o viceversa. Così nella curva formata dal filo *adg (fig. 87)*, sotto l'azione delle due forze eguali ed opposte P e Q, la

curvatura è massima nei punti b, d, f e nulla nei punti a, c, e, g.

Coincidendo l'asse della curva con quello delle x, il valore della tensione, che abbiamo trovato nel n° precedente, diverrà

$$T = -A \frac{dx}{ds};$$

e sarà positivo o negativo, vale a dire rappresenterà una tensione od una pressione, secondochè dx sarà viceversa negativo o positivo. E poichè nel punto di massima distanza dall' asse è sempre $dx = ds$, ivi avrà luogo una pressione eguale alla costante A che rappresenta una delle due forze agenti nella linea dell' asse. Così nel filo elastico *ace* (*fig.* 88), inflesso dall' azione delle forze P e Q, riguardando come positive le x prese nella direzione della forza P, vi sarà tensione da a in b, pressione da b in d, e dinuovo tensione da d in e: nel filo poi *adg* (*fig.* 87) vi è pressione in tutti i suoi punti, poichè nella sua curva di equilibrio dx e ds hanno sempre un medesimo segno. Or nei punti, come b e d (*fig.* 88), nei quali l' elemento ds è perpendicolare all' asse, si ha $dx = 0$, quindi $T = 0$; in quei punti dunque non agisce nè tensione, nè pressione, vale a dire che ivi la reazione molecolare è normale alla curva, e perciò non ha componente nel senso della tangente.

115. Nell' equazione

$$Ay = \frac{k}{r}$$

y è funzione di r e quindi di x; ma volendo la dipendenza immediata di y da x, bisognerà sostituire a $\frac{k}{r}$ il suo equivalente $-k\frac{d\psi}{ds}$[1] (n° 112). Avremo così l' equazione

$$Ay = -k\frac{d\psi}{ds},$$

[1] Per comodo del calcolo abbiamo mutato il segno al 2° membro di quest' equazione; ciò che daltronde equivale a supporre la forza A diretta nel senso delle x negative.

la quale differenziata, ci darà

$$Ady = -kd\left(\frac{d\psi}{ds}\right),$$

che moltiplicata per $\frac{d\psi}{ds}$, e sostituitovi $ds.sen\psi$ a dy, diviene

$$Asen\psi d\psi = -k\frac{d\psi}{ds}d\left(\frac{d\psi}{ds}\right);$$

donde

$$Acos\psi + C = \tfrac{1}{2}k\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = \frac{A^2y^2}{2k}.$$

Or chiamando h l'ordinata massima, avremo pel punto corrispondente della curva $\psi = 0$; quindi

$$A + C = \frac{A^2h^2}{2k} \quad \text{e} \quad C = \frac{A^2h^2}{2k} - A.$$

Il quale valore di C sostituito nell'equazione della curva, avremo

$$h^2 - y^2 = \frac{2k}{A}(1 - cos\psi).$$

Facciamo $1 - cos\psi = z^2$, sarà

$$dx = ds.cos\psi = ds(1 - z^2),$$

e

$$dy = ds.sen\psi = ds\sqrt{(1 - cos^2\psi)} = ds\sqrt{(1 - cos\psi)(1 + cos\psi)}$$
$$= ds.z\sqrt{2 - z^2};$$

quindi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - z^2}{z\sqrt{2 - z^2}} = \frac{1}{z\sqrt{2}} - \frac{3z}{4\sqrt{2}} - \frac{13z^3}{32\sqrt{2}} - \frac{7z^5}{128\sqrt{2}} - \text{ec.};$$

serie di rapidissima convergenza, quando z sia una picco-

lissima frazione; vale a dire quando la curva sia poco divergente dal suo asse. In tal caso potendoci limitare al 1° termine della serie avremo

$$dx = \sqrt{\frac{k}{A}} \cdot \frac{dy}{h^2 - y^2},$$

donde

$$x = \sqrt{\frac{k}{A}} \cdot arco\,sen\,\frac{y}{h},$$

ed

$$y = h . sen\left(\sqrt{\frac{A}{k}} . x\right).$$

Perciò facendo $y = 0$, x sarà uno dei valori della serie 0, $\pi\sqrt{\frac{k}{A}}$, $2\pi\sqrt{\frac{k}{A}}, \dots$; quindi la curva procederà ondulata come quella della *fig. 87*, e $\pi\sqrt{\frac{k}{A}}$ sarà l'intervallo tra due punti d'intersezione coll'asse; e poichè quest'intervallo dovrà esser minore della lunghezza l dell'arco corrispondente, avremo

$$l^2 > \frac{k\pi^2}{A}, \text{ ed } A > \frac{k\pi^2}{l^2}.$$

Vi ha dunque per la forza A un valore minimo, al di sotto del quale essa non potrebbe incurvare il filo; e questo valore minimo, che dicesi *forza elastica della retta* e che sarebbe meglio detto *rigidezza della retta*, è in ragion diretta del coefficiente k di elasticità ed in ragion inversa del quadrato della lunghezza l dell'arco [1].

[1] L'illustre G. Venturali nei suoi giustamente celebrati *Elementi di Meccanica*, trattando dell'equilibrio di una lastra elastica piantata verticalmente ed inflessa pel carico di un peso postovi in cima, perviene all'equazione

$$y = f sen x \sqrt{\frac{G}{E}},$$

Se il filo debba essere inflesso in una linea ondulata (*fig. 87*), l'equazione precedente dimostra che non solo saranno

identica a quella trovata nel testo, e nella quale f è il ventre massimo della curva, ossia l'ordinata corrispondente a $\psi = 0$, G è il peso che gravita sulla lastra di cui E rappresenta la forza elastica.

Or egli proponendosi di determinare il valore di G necessario a produrre una piccolissima inflessione nella lastra, pone che l'intervallo tra i punti estremi della lastra già inflessa ne pareggi la lunghezza; e che in conseguenza facendo $x =$ lunghezza a della lastra, dall'equazione della curva debba risultare $y = 0$. Così egli trova $G = \frac{\pi^2 E}{a^2}$; e ritiene essere questo il valore di G, al di sotto del quale non si potrebbe ottenere l'inflessione della lastra.

Ed avendo supposto che per ogni piccola inflessione l'intervallo dei punti estremi della lastra possa considerarsi eguale alla lunghezza di essa, egli crede poter stabilire l'ipotesi di $G > \frac{\pi^2 E}{a^2}$; indi immagina questo valore introdotto nell'equazione della curva, e trova che non potrebbe coesistere $y = 0$ con $x = a$ senza supporre $f = 0$. Vale a dire che la lastra resterebbe diritta sotto il carico di un peso, maggiore di quello già trovato sufficiente ad incurvarla. Quindi egli si fa a dichiarare l'origine di questo assurdo, dicendo che « allora l'in« flessione non essendo più piccolissima, l'equazione $y = f sen\, x \sqrt{\frac{G}{E}}$ « non è più atta a rappresentare la figura dell'arco della lastra ».

Questa spiegazione è insussistente, poichè l'assurdo a cui mena un processo algoritmico non altro può indicare che una contradizione nei dati del problema; ma non avrà giammai relazione alcuna alla realtà del concetto ipotetico che si ha in veduta. E nel caso presente la contraddizione sta nel porre $G > \frac{\pi^2 E}{a^2}$, mentre G ed a stanno tra loro in tale ragione inversa da rendere sempre soddisfatta l'equazione $G = \frac{\pi^2 E}{a^2}$. Nè vale il dire che in caso di inflessione minima l'intervallo a e la lunghezza l della lastra sono prossimamente eguali; poichè il ventre massimo f sarà sempre una grandezza dello stesso ordine della differenza $l - a$; quindi se questa differenza è trascurabile, lo sarà ancora f. Se poi la lastra debba o pur no piegarsi secondo una curva definitiva dall'equazio-

eguali gl' intervalli *ac*, *ce*, *eg*; ma eziandio gli archi *abc*, *cde*, *efg*, ec. Quindi se invece di applicare le due forze eguali in *a* e *g*, si applicassero in *a* ed *e*, in *a* e *c*, ne risulterebbe sempre lo stesso arco *abc*. Or ponendo che l'arco $abc = \lambda$ sia la n^{esima} parte della lunghezza *l* dell' intero filo, avremo $\lambda^2 = \frac{l^2}{n^2}$; e sostituito questo valore del quadrato della lunghezza dell' arco nell' espressione $A > \frac{\pi^2 k}{l^2}$, avremo

$$A > \frac{\pi^2 n^2 k}{l^2};$$

vale a dire che per uno stesso valore di *k* il valore minimo di A dovrà essere direttamente proporzionale al quadrato del numero di archi in cui sarà inflesso il filo, ed inversamente proporzionale al quadrato dell' intera lunghezza di esso filo.

116. Poniamo che un filo perfettamente flessibile ed inestensibile faccia una circonferenza chiusa, e che dopo esser così piegato acquisti una perfetta elasticità per la quale sia spinto a distendersi in linea retta. Poichè il filo è fisicamente omogeneo in tutta la sua estensione, e la sua curvatura da pertutto uniforme; non potrà alcuna delle sue parti alterare la sua curvatura più o meno che un'altra, nè la circonferenza divenire più grande, poichè si è supposto il filo inestensibile. La circonferenza dunque, secondo la quale il filo era piegato quando si trovava perfettamente flessibile, rimarrà inalterata per la sopraggiunta elasticità.

Or se tolta via una porzione di questa circonferenza elastica, si volesse conservare inalterata la forma dell' arco re-

ne $y = f.sen\,x\sqrt{\frac{G}{E}}$; ciò dalla sola esperienza potrà esser dichiarato, dapoichè se la realtà delle vedute teoretiche potesse avere un criterio nel principio di contraddizione, le leggi di Natura sarebbero necessarie, ciò ch' è assurdo.

siduo, bisognerebbe o rendere immobili gli elementi estremi, o applicarvi delle forze, pel cui contrasto potessero quegli elementi perdurare nei loro luoghi. E poichè il raggio di curvatura (n° 114) dovrà essere per ogni punto della curva inversamente proporzionale alla distanza che lo separa dall' asse, questo dovrà trovarsi infinitamente distante dagli elementi estremi dell' arco circolare, affinchè la sua curvatura costante possa soddisfare alla legge suddetta. Or il momento della forza agente lungo l' asse essendo riferito all' elemento circolare che si riguarda mobile, dovrà per conservarne il sito pareggiare il suo momento di elasticità; e poichè il braccio di leva di quella forza è infinito, l' intensità della forza dovrà essere infinitesima, affinchè il suo momento risulti quantità finita. E poichè una coppia dà risultante infinitesima [1] ad una distanza infinita dai punti di applicazione delle componenti; così farà d' uopo che gli elementi estremi dell' arco circolare elastico siano invariabilmente congiunti ai bracci di leva di due coppie. I cui momenti essendo costanti, comunque le coppie siano girate nel loro piano, la loro azione rimarrà invariata quando anche gli elementi di ciascuna coppia siano divenuti perpendicolari alla tangente dell' elemento circolare sul quale agiscono. Nella curva circolare elastica la tensione è dunque nulla.

[1] La risultante R di due forze parallele P e Q dirette in senso contrario sappiamo (n° 25) esser data dall' equazione $R = P - Q$, la quale nel caso di una coppia dà $R = 0$. Or essendo pel principio fondamentale del calcolo infinitesimale $P + dP = P$, potremo a $P - P$, che rappresenta la risultante di una coppia, sostituire $P + dP - P = dP$, e così avremo $R = dP$.

CAPO UNDECIMO.

Applicazione delle leggi di composizione delle forze al calcolo dell' attrazione dei corpi.

Introduzione — Risultante delle azioni molecolari di uno strato sferico sottilissimo di densità costante sopra una molecola interiore o esteriore. Applicazione al caso della mutua azione di due sfere — Calcolo della risultante delle azioni di un corpo di figura qualunque sopra una molecola esterna o interna. Applicazione delle formole a taluni problemi — Calcolo della risultante delle azioni di un corpo sopra una molecola esteriore nel caso che questa ne sia distante di una quantità grandissima rispetto alle dimensioni del corpo — Determinazione della funzione della distanza, secondo la quale dovrà variare l' azione di uno strato sferico sopra una molecola esteriore, affinchè tutte le componenti elementari diano una risultante applicata al centro dello strato — *Idem* nel caso di una molecola interiore.

117. L' insieme dei fenomeni meccanici del mondo planetario conduce a dover ammettere l' esistenza di una forza identica in tutte le molecole della materia e la cui intensità varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze. La scoverta di questa forza, da cui ebbe cominciamento la Meccanica celeste, fu attuata da Newton comparando i risultamenti che si avevano, ponendone l' esistenza, con quelli che presentava la realtà dei fenomeni. Una tal comparazione, continuata dai geometri più solenni che han potuto menare innanzi le ricerche motivate dall' immenso problema della gravitazione universale, non ha presentato ancora un qualche fatto che fosse in opposizione del principio ipotetico; dimodochè l' esistenza di una mutua gravitazione planetaria proporzionale direttamente alle masse ed inversamente ai quadrati delle distanze, debba ormai riguardarsi come rifermata dall' osservazione. Ma la Dinamica non sarebbe pervenuta giammai a poter calcolare gli effetti di tante forze quante sono le molecole di un pianeta, se la Statica non aves-

se semplificato la quistione con insegnare a comporre tutte quelle forze in una sola risultante. Quindi è che il merito precipuo della grande scoverta newtoniana non è da riporsi nel concetto di mutua gravitazione, già sorto nelle menti di Keppler, Hoock, ec., nè in quello della ragione inversa dei quadrati delle distanze, già conosciuto nei fenomeni della luce; ma piuttosto nella risoluzione del più arduo problema di statica, che fu quello di determinare la risultante delle attrazioni dei corpi sferici; e pel quale problema ebbe Newton ad inventare nuova forma di algoritmo per le grandezze sottoposte alla legge di continuità. Or questo problema, la cui soluzione richiese le profonde meditazioni di una mente straordinaria, oggi mercè i progressi dell' analisi infinitesimale si trova annoverato tra le quistioni elementari della scienza delle forze; e noi andiamo ad esaminarlo nei casi di maggior importanza.

118. Proponiamoci in primo luogo di determinare la risultante di tutte le azioni molecolari di uno strato sferico sottilissimo avente densità costante sopra una molecola esteriore o interiore. Chiamiamo f l' intensità della mutua tendenza di due corpi, ciascuno eguale all' unità di massa, e distanti dell' unità di lunghezza; sarà, in conseguenza del principio della ragion diretta delle masse e dell' inversa dei quadrati delle distanze,

$$\frac{f.dmdm'}{u^2}$$

il valore della mutua tendenza di due molecole dm e dm' situate alla distanza u.

Ciò posto, pel luogo M (*fig.* 89) occupato dalla molecola dm' e pel centro O dello strato sferico immaginiamo condotto un piano, che darà una sezione annulare ABC compresa tra due circonferenze concentriche, di cui saranno raggi $ot=r$ ed $oc=r+dr$. Chiamando θ l' angolo MOt, sarà $d\theta$ l' angolo infinitesimo sot; ed avremo della sezione

annulare l' elemento $bstc = rd\theta dr$. Or immaginiamo che questa sezione roti intorno all' asse OM : lo strato sferico ne verrà riprodotto, e la superficie infinitesima $bcts$ produrrà un anello, che sarà elemento dello strato, e la cui massa (chiamandone ρ la densità) sarà espressa da

$$2\pi . tq . \rho rd\theta dr = 2\pi\rho r^2 sen\theta d\theta dr.$$

Poniamo inoltre che per l'asse OM siano condotti infiniti piani che facciano a vicenda angoli infinitesimi ed eguali : l' anello generato dalla superficie $bcts$ ne verrà diviso in elementi infinitesimi eguali, di cui considerando quelli giacenti negli angoli diedri opposti della serie dei piani, avremo altrettante coppie di forze eguali, ognuna delle quali produrrà sulla molecola dm' un' azione diretta secondo OM, e rappresentata da $\frac{2fdmdm'}{u^2} cos\beta$, chiamando dm un elemento dell' anello, u la sua distanza dalla molecola dm', e β l'angolo OMt. Quindi l'azione dell' intero anello sulla molecola dm' sarà aspressa da

$$\frac{fdm'.cos\beta}{u^2}\int dm = \frac{2\pi\rho fr^2 drdm' sen\theta d\theta}{u^2} cos\beta.$$

Ma facendo OM $= \alpha$, il triangolo OMt ci offre le due relazioni

$$2\alpha u cos\beta = \alpha^2 + u^2 - r^2,$$
$$2\alpha r cos\theta = \alpha^2 + r^2 - u^2 ;$$

la prima delle quali ci dà

$$cos\beta = \frac{\alpha^2 + u^2 - r^2}{2\alpha u},$$

e la seconda differenziata ci dà

$$\alpha r sen\theta d\theta = udu.$$

Sostituendo questi valori di $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\theta d\theta$ nell' espressione della risultante, avremo

$$\frac{\pi\rho f r dr}{\alpha^2} dm' \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{u^2} du\ ;$$

quindi l'azione dell' intero strato sferico sulla molecola dm' sarà

$$\frac{\pi\rho f r dr}{\alpha^2} dm' \int \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{u^2} du = \frac{\pi\rho f r dr}{\alpha^2} dm' \left(u+\frac{r^2-\alpha^2}{u}\right)+\mathrm{C}.$$

Se la molecola dm' giacesse in un punto qualunque dallo spazio racchiuso dallo strato sferico, i limiti dell' ultimo integrale sarebbero $u=r+\alpha$ ed $u=r-\alpha$; e poichè

$$\int_{r-\alpha}^{r+\alpha}\left(u+\frac{r^2-\alpha^2}{u}\right)=0,$$

ne risulta che la molecola dm' rimarrebbe in equilibrio qualunque punto occupasse dello spazio interiore allo strato sferico. Ma se la molecola dm' ne giacesse fuori, $u=\alpha+r$ ed $u=\alpha-r$ sarebbero i limiti dell' integrale; ed avremmo

$$\int_{\alpha-r}^{\alpha+r}\left(u+\frac{r^2-\alpha^2}{u}\right)=4r\ ;$$

quindi

$$\frac{\pi\rho f r dr}{\alpha^2} dm' \int \frac{u^2+\alpha^2-r^2}{u^2} du = \frac{4f\rho\pi r^2 dr}{\alpha^2} dm'. \quad (a)$$

Or $4\rho\pi r^2 dr$ è la massa dello strato sferico; quindi la sua azione sulla molecola dm' è quella stessa che si avrebbe, se tutta la sua massa fosse riunita nel suo centro O.

Lo stesso risultamento si avrebbe se lo strato sferico avesse una doppiezza finita, poichè chiamando r il raggio della superficie sferica esterna ed r' quello dell' interna, la

sua azione sulla molecola dm' sarebbe espressa da

$$\frac{4\pi\rho f dm'}{\alpha^2}\int_{r'}^{r} r^2 dr = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho f(r^3-r'^3)}{\alpha^2} dm';$$

ed è chiaro che $\frac{4}{3}\pi\rho(r^3-r'^3)$ esprime la massa dello strato. Donde è poi facile dedurre che l'azione di una sfera omogenea, o composta di strati omogenei concentrici, è la stessa che se tutta la massa ne fosse riunita nel centro.

E se la molecola dm' giacesse sulla superficie della sfera, avremmo $\alpha = r$; quindi

$$\frac{{}^4/_3\pi\rho r^3}{\alpha^2} = \frac{4}{3}\pi\rho r,$$

vale a dire che l'azione della sfera sulla molecola dm' sarebbe proporzionale al raggio di essa nell'ipotesi di ρ costante. Perciò se la terra fosse sferica ed omogenea, i gravi giacenti nell'interno di essa peserebbero sotto eguali masse in ragion diretta della loro distanza dal centro.

Supponiamo in fine due sottilissimi strati sferici A e B (*fig. 90*), di cui siano r ed r' i raggi, ρ e ρ' le densità. Poichè l'azione dello strato B sopra una molecola m appartenente ad A è la stesssa che se tutta la massa dello strato B fosse riunita nel suo centro o'; così sarà sufficiente sostituire $4\rho' r'^2 dr'$ a dm' nell'equazione (a) per avere la risultante delle reciproche azioni dei due strati, la quale sarà in conseguenza espressa da

$$\int \frac{4\rho r^2 dr . 4\rho' r'^2 dr'}{\alpha^2};$$

vale a dire eguale a quella di due masse equivalenti ad A e B e riunite nei rispettivi centri — Lo stesso teorema ha luogo rispetto a due sfere omogenee, o almeno composte di strati concentrici omogenei.

119. Passiamo ora a calcolare la risultante di tutte le

mutue azioni tra le molecole di un corpo di figura qualunque ed una molecola sia interna, sia esterna. Siano α, β, γ le coordinate di questa molecola, ed x, y, z quelle di una molecola qualunque del corpo; sarà la loro distanza

$$r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}.$$

Quindi, chiamando ρ la densità del corpo e μ la massa della molecola che ne riceve l'azione, la mutua tendenza tra le due molecole $\rho dxdydz$ e μ sarà espressa da

$$\frac{f\mu\rho dxdydz}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

le cui componenti x_1, y_1, z_1 parallele agli assi saranno

$$x_1=\frac{f\mu(x-\alpha)\rho dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_1=\frac{f\mu(y-\beta)\rho dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_1=\frac{f\mu(z-\gamma)\rho dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In conseguenza le componenti delle azioni di tutto il corpo sulla molecola η saranno espresse da

$$\mathrm{X}=f\mu\iiint\frac{\rho(x-\alpha)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{Y}=f\mu\iiint\frac{\rho(y-\beta)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{Z}=f\mu\iiint\frac{\rho(z-\gamma)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or i valori di queste tre componenti dell' azione del corpo sulla molecola μ si possono determinare mercè un solo in-

tegrale. Ed in vero facciamo

$$V = f\mu \iiint \frac{p\,dx\,dy\,dz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ed avremo

$$X = \frac{dV}{d\alpha}, \quad Y = \frac{dV}{d\beta}, \quad Z = \frac{dV}{d\gamma}.$$

Basterà dunque conoscere V perchè siano noti i valori di X, Y, Z. Osserviamo inoltre che

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = f\mu \iiint \frac{\rho(2(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-(z-\gamma)^2)dx\,dy\,dz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = f\mu \iiint \frac{\rho(2(y-\beta)^2-(x-\alpha)^2-(z-\gamma)^2)dx\,dy\,dz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = f\mu \iiint \frac{\rho(2(z-\gamma)^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2)dx\,dy\,dz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{5}{2}}};$$

donde

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

equazione di condizione, di cui vedremo l'utilità applicandola ad un problema già risoluto nel n° precedente; ma è d'uopo che ne facciamo prima osservare un caso importante. Ponendo che la molecola μ faccia parte della massa del corpo, avremo rispetto al luogo da essa occupata $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; quindi

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{0}{0}, \quad \frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{0}{0}, \quad \frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{0}{0}.$$

Perchè scomparisca questa forma d'indeterminazione nelle derivate 2e di V, immaginiamo una sfera che avesse il centro nell'origine delle coordinate, ed il cui raggio fosse e-

guale alla distanza donde n'è separata la molecola μ. In tal modo la funzione V diverrà somma di due altre U ed U', la prima delle quali apparterrà alla sfera, la seconda alla rimanente massa del corpo; e poichè la molecola μ è esterna a quest' ultima, sarà soddisfatta l' equazione

$$\frac{d^2U'}{d\alpha^2}+\frac{d^2U'}{d\beta^2}+\frac{d^2U'}{d\gamma^2}=0.$$

Resterà quindi

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{dV^2}{d\gamma^2}=\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{d^2U}{d\beta^2}+\frac{d^2U}{d\gamma^2}.$$

Ma $\frac{dU}{d\alpha}$, $\frac{dU}{d\beta}$, $\frac{dU}{d\gamma}$ sono le componenti dell' azione della sfera sulla molecola μ giacente sulla sua superficie; quindi (n° 118) avremo

$$\frac{dU}{d\alpha}=\tfrac{4}{3}\pi\rho\alpha,\quad \frac{dU}{d\beta}=\tfrac{4}{3}\pi\rho\beta,\quad \frac{dU}{d\gamma}=\tfrac{4}{3}\pi\rho\gamma,$$

e

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}=\tfrac{4}{3}\pi\rho,\quad \frac{d^2U}{d\beta^2}=\tfrac{4}{3}\pi\rho,\quad \frac{d^2U}{d\gamma^2}=\tfrac{4}{3}\pi\rho;$$

donde

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{d^2U}{d\beta^2}+\frac{d^2U}{d\gamma^2}=4\pi\rho.$$

120. Applichiamo ora l' equazione

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0$$

ai seguenti problemi.

I.

Determinare la risultante delle azioni di una sfera, la cui densità sia una funzione qualunque del raggio, sopra una molecola esteriore.

Prendendo il centro della sfera per origine, la sua distanza c dalla molecola μ dà luogo all'equazione

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

E poichè la simmetria della sfera rispetto ad ogni suo diametro mena necessariamente alla conseguenza che la quantità di azione debba rimanere invariata con c costante; così è chiaro che V dovrà essere funzione immediata di c, e mediata di α, β, γ. Laonde

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{dV}{dc} \cdot \frac{dc}{d\alpha},$$

e

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{dc}{d\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dV}{dc}\right) + \frac{dV}{dc} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dc}{d\alpha}\right)$$
$$= \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{dc^2}{d\alpha^2} + \frac{dV}{dc} \cdot \frac{d^2c}{d\alpha^2}.$$

Or differenziando rispetto ad α l'equazione $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, abbiamo

$$\frac{dc}{d\alpha} = \frac{\alpha}{c}, \quad \frac{dc^2}{d\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{c^2}, \quad \frac{d^2c}{d\alpha^2} = \frac{c - \alpha\frac{dc}{d\alpha}}{c^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\alpha^2}{c^2};$$

quindi sostituendo avremo

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc}\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right).$$

Similmente si avranno

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{\beta^2}{c^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc}\left(1 - \frac{\beta^2}{c^2}\right),$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{d^2V}{dc^2} \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc}\left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right).$$

Addizionando queste derivate 2ᵉ di V avremo

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{d^2V}{dc^2} + \frac{2}{c} \cdot \frac{dV}{dc} = 0.$$

Moltiplicando quest' ultima espressione per c^2 e poi integrandola, otterremo

$$\frac{dV}{dc} = \frac{cost.}{c^2}.$$

Or avendo supposto che la densità ρ sia una funzione del raggio, l' azione della sfera sulla molecola esteriore sarà simmetrica rispetto alla retta che congiunge la molecola col centro della sfera; secondo la stessa retta agirà dunque la risultante. Perciò togliendo quella linea ad asse delle x, $\frac{dV}{dc}$ rappresenterà l' azione della sfera secondo la stessa linea, vale a dire la risultante delle sue azioni sulla molecola esteriore; e poichè la si trova rappresentata da $\frac{cost.}{c^2}$, è dunque inversamente proporzionale al quadrato della distanza della molecola dal centro della sfera.

II.

Determinare la risultante delle azioni di un cilindro infinitamente lungo sopra una molecola esteriore.

Supponendo il cilindro omogeneo o almeno di una densità che sia funzione del raggio della circonferenza direttrice, è chiaro che nell' ipotesi di una lunghezza infinita l'azione del cilindro sulla molecola esteriore dovrà dipendere immediatamente dalla distanza che la separa dall' asse del cilindro. Perciò prendendo questa linea per asse delle z, e riponendo il piano delle x y in quello che normalmente al

detto asse sia condotto pel luogo della molecola esteriore, avremo che la distanza c della molecola dall' asse sarà espressa dall' equazione

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

nella quale α e β ne disegnano le coordinate. Quindi la derivata 2ª di V rispetto ad α e β ci darà

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{d^2V}{dc^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc} = 0.$$

E moltiplicando l' ultima espressione per c^2, poi integrando, si ottiene

$$\frac{dV}{dc} = \frac{cost.}{c};$$

vale a dire che la risultante delle azioni del cilindro sulla molecola esteriore è inversamente proporzionale alla sua distanza dall' asse.

III.

Determinare la risultante delle azioni di un cilindro infinitamente lungo sopra una molecola interiore.

La molecola facendo parte della massa del cilindro, avremo (nº **119**) l' equazione

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 4\pi p,$$

nella quale sostituendo a $\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2}$ il suo valore $\frac{d^2V}{dc^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc}$, si ottiene

$$\frac{d^2V}{dc^2} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dV}{dc} = 4\pi p.$$

Or integrando quest' ultima equazione dopo averne moltipli-

cato i due membri per c, avremo nell' ipotesi di ρ costante

$$\frac{dV}{dc} = 2\pi\rho c + C\ ;$$

e poichè nell' ipotesi di $c = 0$ è $\frac{dV}{dc} = 0$, sarà $C = 0$. Quiodi si avrà la risultante direttameote proporzionale alla distanza della molecola dall' asse del cilindro.

Che se poi fosse $\rho = f(c)$, sarebbe

$$\frac{dV}{dc} = \frac{4\pi}{c}\int f(c)cdc.$$

Così pooeodo $\rho = \frac{n}{c}$, si avrà

$$\frac{dV}{dc} = 4\pi n\ ;$$

e facendo $\rho = nc$, sarà

$$\frac{dV}{dc} = \tfrac{4}{3}\pi nc^2.$$

È dunque costaote l' azioοe del cilindro sulla molecola interiore, quando la densità è inversamente proporziooale alla distanza della molecola dall' asse; ed è viceversa in ragion diretta del quadrato di questa distanza, allorchè ρ è in ragioo diretta di c.

121. Nelle quistiooi relative alla mutua teodenza tra un corpo ed uoa molecola esteriore non abbiamo fatto veruna ipotesi sulla ragiooe della distanza della molecola alle dimeosiooi del corpo. Or pooiamo che questa distaoza sia grandissima rispetto a quelle dimeosioni; e fissaodo l' origine delle coordinate oel ceotro di gravità del corpo, facciamo che l' asse delle x passi pel luogo occupato dalla molecola esteriore la cui massa chiamiamo μ. Sia ϑ l' a-

scissa del punto da essa occupato, ed x quella di una molecola dm del corpo; e siano u e c le distanze di dm dall'origine e da μ. Con questi dati la funzione V (n° 119) diverrà

$$V = f\mu\Sigma dm(\vartheta^2 - 2\vartheta x + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= f\mu\,\frac{\Sigma dm}{\vartheta}\left(1 - 2\,\frac{x}{\vartheta} + \frac{u^2}{\vartheta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Or svolgendo in serie la quantità racchiusa tra parentesi, ed osservando che per esser l'origine nel centro di gravità del corpo, sarà $\Sigma x.dm = 0$, avremo

$$V = f\mu\,\frac{M}{\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^3}\,\Sigma(3x^2 - u^2)dm + \ldots$$

E poichè ϑ che si suppone grandissima rispetto alle dimensioni del corpo, lo sarà ancora riguardo ad x ed u, così potremo trascurare i termini che avranno ϑ^2, ϑ^3, ec; ed avremo con sufficiente approssimazione

$$V = f\mu\,\frac{M}{\vartheta}\,.$$

Ciò posto, immaginiamo un qualunque sistema di assi rettangolari condotti pel centro di gravità del corpo, e siano α, β, γ le coordinate del luogo occupato dalla molecola μ: sarà

$$\vartheta = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}\,;$$

quindi

$$V = f\mu M(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\,;$$

ed $X = \frac{dV}{d\alpha}$, $Y = \frac{dV}{d\beta}$, $Z = \frac{dV}{d\gamma}$ (n° 119) diverranno

$$X = -\frac{f\mu M}{\vartheta^2}\cdot\frac{\alpha}{\vartheta}\,,\quad Y = -\frac{f\mu M}{\vartheta^2}\cdot\frac{\beta}{\vartheta}\,,\quad Z = -\frac{f\mu M}{\vartheta^2}\cdot\frac{\gamma}{\vartheta}\,;$$

che sono evidentemente le componenti di una forza $f\mu M$ applicata al centro di gravità del corpo e che agisce nella ragione inversa dei quadrati delle distanze da quel centro. Dunque questo risultamento, ch' è vero per le sfere omogenee o composte di strati concentrici omogenei lo è approssimativamente per un corpo di qualsivoglia figura, allorchè le sue dimensioni sono piccolissime rispetto alla distanza che lo separa dalla molecola su cui agisce.

Ma se la gravità in vece di agire nella ragione inversa dei quadrati delle distanze, seguisse la loro semplice ragion diretta, allora la riduzione delle masse nei centri di gravità dei corpi attraenti condurrebbe a risultamenti esatti qualunque ne fosse la figura. Ed in vero ponendo l'origine nel centro di gravità del corpo, siano x y z le coordinate di qualunque sua molecola dm, ed α β γ quelle di una molecola μ esteriore al corpo e distante dal suo centro di gravità di una quantità $\vartheta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Le componenti della mutua azione del corpo e della molecola μ saranno (n° 119)

$$X = f\mu\Sigma dm(x-\alpha) = -f\mu M\alpha\,,$$
$$Y = f\mu\Sigma dm(y-\beta) = -f\mu M\beta\,,$$
$$Z = f\mu\Sigma dm(z-\gamma) = -f\mu M\gamma\,,$$

essendo $\Sigma xdm = \Sigma ydm = \Sigma zdm = 0$ poichè l'origine è nel centro di gravità del corpo; e facendo ancora $\Sigma dm = M$. E poichè

$$f\mu M\alpha = f\mu M\vartheta.\frac{\alpha}{\vartheta}\,,\; f\mu M\beta = f\mu M\vartheta.\frac{\beta}{\vartheta}\,,\; f\mu M\gamma = f\mu M\vartheta.\frac{\gamma}{\vartheta}\,,$$

si vede chiaramente che i valori di X, Y, Z appartengono ad una risultante $f\mu M$ applicata al centro di gravità della massa M, e che ad una distanza ϑ da questo centro esercita sulla molecola μ un' azione rappresentata da $f\mu M\vartheta$.

122. Abbiamo veduto come l' azione di uno strato sferico omogeneo sopra una molecola esteriore possa ridursi ad una

forza sola applicata nel centro dello strato, ponendo che la mutua tendenza delle molecole segua la ragion inversa dei quadrati delle distanze, o di queste la ragion semplice diretta. Or per conoscere se vi siano altre ipotesi che possano menare allo stesso risultamento, noi andiamo a risolvere il seguente problema.

Determinare secondo qual funzione della distanza debba variare la mutua tendenza delle molecole dei corpi, perchè l' azione di uno strato sferico omogeneo sopra una molecola esteriore sia riducibile ad una sola forza applicata nel suo centro.

Considerando, come abbiamo fatto nel n° **118**, lo strato sferico diviso in elementi annulari, aventi per asse comune la congiungente il centro O (*fig. 89*) col punto M occupato dalla molecola esteriore dm'; è chiaro che qualunque sia la funzione $\varphi(c)$ della distanza c che separa dm' da qualsivoglia molecola di un anello elementare, la risultante delle azioni su dm' dovrà per la simmetria della figura esser diretta secondo OM. Or la massa dell' anello, di cui $bstc$ è la superficie generatrice, essendo espressa (n° 118) da $2\pi\rho r^2 dr sen\theta d\theta$, la sua azione sulla molecola dm', perchè variabile secondo la funzione $\varphi(c)$ della distanza, sarà rappresentata da $2\pi\rho f dm'\varphi(c)r^2 dr sen\theta d\theta cos\beta$, facendo l' angolo COM $=\theta$, e tMO $=\beta$. Ma ponendo OM $=\alpha$, $ot=r$, M$t=c$, avremo

$$cos\beta=\frac{\alpha^2+c^2-r^2}{2\alpha c},$$

e

$$2\alpha r cos\theta=r^2+\alpha^2-c^2,$$

donde

$$sen\theta d\theta=\frac{cdc}{\alpha r}.$$

Sostituiti questi valori di $cos\beta$ e $sen\theta d\theta$ nell' espressione dell' azione di un anello sulla molecola dm', essa diverrà

$$\frac{\pi\rho f dm' r dr}{\alpha^2}(\alpha^2+c^2-r^2)\varphi(c)dc\ ;$$

quindi l' azione dell'intero strato sferico sarà

$$\frac{\pi\rho f dm' r dr}{\alpha^2}\int(\alpha^2+c^2-r^2)\varphi(c)dc.$$

Ed eseguendo per parti questa integrazione, avremo

$$\int(\alpha^2+c^2-r^2)\varphi(c)dc = (\alpha^2+c^2-r^2)\int\varphi(c)dc - 2\int c\left(\int\varphi(c)dc\right)dc$$
$$= (\alpha^2+c^2-r^2)\varphi'(c) - 2\psi(c)\,,$$

facendo $\int\varphi(c)dc = \varphi'(c)$, e $\int c\left(\int\varphi(c)dc\right)dc = \psi(c)$. E poichè quest' integrali debbono estendersi a tutto lo strato sferico, perciò dovranno prendersi tra i limiti $c=\alpha+r$ e $c=\alpha-r$; così avremo

$$\int_{\alpha-r}^{\alpha+r}(\alpha^2+c^2-r^2)\varphi(c)dc = 2\Big[\alpha(\alpha+r)\varphi'(\alpha+r)-\alpha(\alpha-r)\varphi'(\alpha-r)$$
$$-\psi(\alpha+r)+\psi(\alpha-r)\Big].$$

Or dividendo per α^2 il 2° membro di questa ultima equazione, lo troviamo eguale a

$$2\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\psi(\alpha+r)-\psi(\alpha-r)}{\alpha}\right];$$

quindi

$$\frac{\pi\rho f dm' r dr}{\alpha^2}\int_{\alpha-r}^{\alpha+r}(\alpha^2+c^2-r^2)\varphi(c)dc = 2\pi\rho f dm' r dr\,\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\psi(\alpha+r)-\psi(\alpha-r)}{\alpha}\right].$$

Ma l'azione dello strato sferico sulla molecola dm' deve esser la stessa che se tutta la massa dello strato fosse riunita nel suo centro, nel qual caso essa avrà il valore $4\pi\rho f r^2 dr dm'\varphi(\alpha)$; dovrà dunque essere

$$2r\varphi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\psi(\alpha+r)-\psi(\alpha-r)}{\alpha}\right].$$

E poichè svolgendo colla formola di Taylor $\psi(\alpha+r)$ e $\psi(\alpha-r)$ abbiamo

$$\psi(\alpha+r)-\psi(\alpha-r)=2\left[\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}r+\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\frac{r^3}{2.3}+\ldots\right];$$

così avremo

$$r\varphi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\frac{r^3}{\alpha}+\ldots\right]$$

$$=r\varphi(\alpha)+\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\frac{r^3}{\alpha}+\ldots\right];$$

ed in conseguenza per qualsivoglia valore di r dovrà essere

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\frac{r^2}{\alpha}+\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^5\psi(\alpha)}{d\alpha^5}\cdot\frac{r^4}{\alpha}+\ldots\right]=0,$$

vale a dire

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\right]=0,\quad \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d^5\psi(\alpha)}{d\alpha^5}\right]=0, \text{ ec.}$$

Ma

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}=\alpha\int\varphi(\alpha)d\alpha,\quad \frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2}=\int\varphi(\alpha)d\alpha+\alpha\varphi(\alpha),$$

$$\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}=2\varphi(\alpha)+\alpha\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha};$$

quindi

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d^3\psi(\alpha)}{d\alpha^3}\right]=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{2}{\alpha}\varphi(\alpha)+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right]=0;$$

donde

$$\frac{2}{\alpha}\varphi(\alpha)+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=C,$$

indicando C una costante arbitraria. Or moltiplicando per

α^2 i due membri dell' ultima equazione e poi integrando si ottiene

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{3}C\alpha + \frac{C'}{\alpha^2};$$

vale a dire

$$\varphi(c) = \tfrac{1}{3}Cc + \frac{C'}{c^2}.$$

Or essendo C e C' due costanti arbitrarie, potremo far $C = 0$: sarà così

$$\varphi(c) = \frac{C'}{c^2},$$

vale a dire che la mutua tendenza molecolare sarà reciprocamente proporzionale ai quadrati delle loro distanze. E similmente facendo $C' = 0$, avremo

$$\varphi(c) = \tfrac{1}{3}Cc,$$

cioè l'attrazione in ragion semplice diretta delle distanze molecolari. Ma se riteniamo esser C e C' due numeri; allora porzione delle molecole potrà seguire la ragion inversa dei quadrati, il rimanente di esse la ragion semplice diretta delle distanze, e la risultante di tutte le loro azioni rimarrà tuttavia applicata al centro dello strato sferico.

123. Cerchiamo in fine secondo qual funzione della distanza debba variare la mutua tendenza delle molecole, perchè una di esse ovunque situata nell' interno di uno strato sferico omogeneo, ivi rimanga in equilibrio.

L' espressione

$$\frac{\pi\rho f dm' r dr}{\alpha^2} \int (\alpha^2 + c^2 - r^2)\varphi(c)dc$$

che abbiamo trovato nel n° precedente come valore dell' azione di uno strato sferico omogeneo sopra una molecola esteriore, disegnerà ancora l' azione di esso strato sopra una molecola interiore, quando l' integrale si estenda dal limite

$e = r+\alpha$ al limite $c = r-\alpha$. E poichè quella espressione l' abbiamo veduta ridotta a

$$2\pi\rho f dm' r dr \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\psi(r+\alpha)-\psi(r-\alpha)}{\alpha}\right],$$

dovrà dunque essere

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\psi(r+\alpha)-\psi(r-\alpha)}{\alpha}\right] = 0,$$

affinchè la molecola interiore sia ovunque in equilibrio. Vale a dire che dovrà essere, qualunque sia α,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^3\psi(r)}{dr^3}\cdot\frac{\alpha^2}{2.3} + \dots\right] = 0,$$

ossia

$$\frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^3\psi(r)}{dr^3}\cdot\frac{\alpha^2}{2.3} + \dots = -C.$$

E poichè la costante $-C$ è indipendente da α, sarà

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = -C, \quad \frac{d^3\psi(r)}{dr^3} = 0, \text{ ec.}$$

Avremo così una serie di equazioni di condizione che saranno tutte soddisfatte, quando lo sia la 1ª, la quale riducendosi a

$$\int \varphi(r)dr = -\frac{C}{r},$$

dà mercè la differenziazione

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^2}.$$

Vale a dire che la legge di mutua tendenza dev'esser quella della ragione inversa dei quadrati delle distanze.

CAPO DUODECIMO.

Dell' equilibrio de' liquidi.

Definizione dei liquidi — Principio di egual pressione — Sua dipendenza dal teorema delle celerità virtuali — Equazione di condizione per l'equilibrio di una massa liquida sottoposta a forze qualunque — Condizione analitica, a cui debbono soddisfare le funzioni esprimenti le intensità delle forze, perchè l'equilibrio di un fluido sia possibile — Superficie di livello — Equilibrio delle acque stagnanti, e dei liquidi eterogenei versati in uno stesso recipiente — Figura di equilibrio di una massa liquida, le cui molecole si attirino con forze reciprocamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze — Pressione di un liquido pesante sul fondo orizzontale del suo recipiente — Pressione sulle facce laterali — Spiegazione del paradosso idrostatico — Centro di pressione — Equilibrio nei tubi comunicanti — Equilibrio dei galleggianti. Matacentro.

124. Nelle diverse ipotesi finora messe innanzi sul coordinamento dei punti di applicazione di un sistema di forze, abbiamo sempre supposto che il legame congiungente un punto all' altro fosse invincibile dall' azione delle forze impresse, e che soltanto le loro rispettive posizioni (come nei fili flessibili), e tra certi limiti anche le loro distanze (come nei fili elastici per trazione) fossero alterabili. Or immaginiamo che il sistema dei punti di applicazione sia riposto in un sistema di molecole, le quali mentre oppongono vigorosa resistenza alle forze tendenti a diminuire le loro mutue distanze, abbiano poi sì debole coesione da cedere, pressochè senza ostare, alle forze dirette a separare le une dalle altre. Sotto questi dati la Fisica riconosce le proprietà caratteristiche dei liquidi; e la Meccanica razionale cercando le condizioni di equilibrio di un sistema di forze applicate ad un consimile sistema di punti, verrà dichiarando in qual modo le leggi sperimentali dell' Idrostatica dipendano dalla natura fisica dei liquidi.

123. Quando le molecole di un solido divengono punti di applicazione di un certo sistema di forze, le pressioni da queste ingenerate incontrano nei legami, donde sono congiunte le minime particelle del corpo, un ostacolo alla loro libera diffusione in tutta la massa. Ma nei liquidi, la cui debole coesione produce la pressocchè perfetta mobilità relativa delle loro particelle, mentre vigorose forze ripulsive le ritengono nelle loro rispettive distanze, non si può produrre pressione in un punto della loro massa senza che la mobilità e reazione molecolare la trasmettano inalterata in tutti gli altri punti. Questa proprietà meccanica dei liquidi è conosciuta sotto il nome di *principio di egual pressione*, ed essa, come vedremo, conduce immediatamente all'equazione di condizione per l'equilibrio di una massa liquida sottoposta all'azione di forze qualunque. E per viemeglio dichiarare il concetto di un tal principio, la cui realtà è messa fuor di dubbio dall'insieme dei fatti idrostatici [1], immaginiamo che un liquido, non sottoposto all'azione di veruna forza, occupi esattamente la capacità di un recipiente di qualsivoglia forma ABCD *(fig. 91)*, sulle cui pareti siano scolpiti i fori m, n, s, t, ec. chiusi da altrettanti stantuffi che vi combacino esattamente. Poniamo inoltre che sulla base dello stantuffo m agisca normalmente una forza che sull'unità di superficie produrrebbe la pressione P, e che produrrà in conseguenza la pressione Pa sull'area a del foro m: in forza del principio di egual pressione l'equilibrio del liquido richiederà che sulle basi degli stantuffi applicati ai rimanenti fori n, s, t, ec. aventi le aree a', a'', a''', ec. agiscano le pressioni Pa', Pa'', Pa''', ec. Vale a dire che il principio, di cui è parola, consiste in ciò che fatta una pressione p sopra un'area a comunque giacente in una massa liquida, un'egual pressione sarà ingenerata su tutte le aree eguali ad a che potremo immaginare esistenti nella

[1] Ved. la mia Fisica — libro IV, cap. I.

stessa massa, e comunque situate rispetto alla primitiva direzione di p.

126. Comparando il principio di egual pressione al teorema delle celerità virtuali, troviamo che il primo è un semplice corollario del secondo, quando sia applicato al caso dei fluidi incompressibili. Ed in vero, immaginiamo che ad ogni foro del recipiente ABCD (*fig. 91*) sia adattato un tubo cilindrico per guida dello stantuffo corrispondente, e che il liquido essendo in equilibrio sotto le pressioni prodotte dalle forze applicate alle basi degli stantuffi, uno di questi, e sia quello che chiude il foro m, venga spinto innanzi per una piccola quantità ϑ. La reazione del liquido farà retrocedere di ϑ', ϑ'', ϑ''', gli stantuffi applicati ai fori n, s, t, ec.; ed essendo Pa, $P'a'$, $P''a''$, ec. le forze prementi il liquido sulle aree a, a', a'', ec. dei fori, i loro momenti virtuali saranno espressi da $Pa\vartheta$, $P'a'\vartheta'$, $P''a''\vartheta''$, ec. Quindi (n° 84) dovrà esser soddisfatta l'equazione

$$Pa\vartheta + P'a'\vartheta' + P''a''\vartheta'' + \ldots = 0.$$

Ma nell'ipotesi di un liquido incompressibile, $a\vartheta + a'\vartheta' + a''\vartheta'' + \ldots$, ch'esprime l'alterazione avvenuta nel volume, dovrà essere pareggiata a zero; in conseguenza l'equazione precedente non potrà esser soddisfatta, se non sia $P = P' = P'' =$ ec. Vale a dire che le pressioni sulle aree, a, a', a'', ec. dei fori, conformemente all'enunciato del principio di egual pressione, dovranno essere Pa, Pa', Pa'', ec.

127. Ammessa la realtà del principio di egual pressione, cerchiamo le condizioni di equilibrio di una massa liquida, le cui molecole siano animate da forze qualunque. Immaginiamo riferito a tre assi rettangolari (*fig. 92*) il luogo occupato dalla massa liquida; e nell'angolo triedro dei tre assi positivi consideriamo un elemento di essa, che definito da piani paralleli a quelli degli assi coordinati avrà la forma di un parallelepipedo rettangolare, di cui dx, dy, dz saranno i tre spigoli. Chiamando ρ la densità, che sarà co-

stante in un liquido omogeneo, e nei liquidi eterogenei sarà una funzione delle coordinate x, y, z del punto occupato dall' elemento M, sarà l' infinitesimo della massa espresso da

$$dm = \rho dxdydz.$$

Agiranno sull' elemento dm le forze applicate immediatamente alle sue molecole, e le pressioni prodotte dal liquido ambiente. Decomponendo le prime secondo gli assi, avremo le tre componenti

$$\rho X dm\,,\ \rho Y dm\,,\ \rho Z dm\,;$$

e rispetto alle seconde indicando con $pdxdy$ la pressione fatta nel senso delle z positive sulla faccia $dxdy$ del parallelepipedo elementare, prossima al piano delle xy, quella che agirà sulla faccia opposta, corrispondente al punto determinato dalle coordinate x, y, $z+dz$, sarà espressa da $\left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)dxdy$, ed avrà direzione opposta alla prima; dimodochè la pressione del liquido ambiente spingerà l' elemento dm nel senso delle z con forza rappresentata da

$$-\frac{dp}{dz}dzdxdy.$$

Similmente chiamando $rdydz$, $qdxdz$ le pressioni sulle facce $dydz$, $dxdz$ concorrenti al punto (x, y, z), troveremo che parallelamente agli assi delle x e delle y l'elemento dm sarà spinto dalle pressioni

$$-\frac{dr}{dx}dydxdz\,,\ -\frac{dq}{dy}dydxdz.$$

Quindi l' equilibrio dell' elemento liquido richiederà soddisfatte le tre equazioni (n.° 17)

$$\rho X-\frac{dr}{dx}=0\,,\ \rho Y-\frac{dq}{dy}=0\,,\ \rho Z-\frac{dp}{dz}=0.$$

Se gli elementi parallelepipedi, in cui abbiamo immaginato divisa l'intera massa, in vece di esser liquidi fossero solidi e semplicemente adiacenti l'uno all'altro, nessuna necessaria relazione potrebbe scorgersi tra p, q ed r. Potrebbero, a modo di esempio, trovarsi sottoposte ad energica pressione le facce $dxdy$, distinte dalle ordinate z e $z+dz$, senza che le facce $dxdz$, $dydz$ ne patissero alcuna. Ma nell'ipotesi di un corpo liquido, la pressione $pdxdy$ agente sulla faccia superiore del parallelepipedo, pel principio di egual pressione sarà trasmessa con l'intensità $pdydz$ su ciascuna delle due facce $dydz$, ed ivi agirà da dentro in fuori. Considerandola nella sua azione sulla faccia $dydz$ prossima al piano delle yz, è chiaro che essa, congiunta all'azione γ che nella stessa direzione potrà esser prodotta dalle forze interiori all'elemento dm, dovrà fare equilibrio alla pressione $rdydz$ che viceversa da fuori in dentro agirà sulla stessa faccia $dydz$. Nell'equilibrio dovrà dunque esser soddisfatta l'equazione

$$rdydz = pdydz + \gamma.$$

Ma γ non potendo essere di un ordine di grandezza inferiore a quello di dm, come infinitesimo di 3° ordine dovrà esser cancellato rispetto all'infinitesimo di 2° ordine $pdydz$; sarà dunque $p = r$. E nello stesso modo si troverà dover essere $p = q$. Donde poi segue che la pressione patita da un elemento di superficie, ovunque situato in una massa liquida, sarà indipendente dall'inclinazione dell'elemento ai piani coordinati.

Poichè $p = q = r$, potremo nelle tre equazioni di equilibrio dell'elemento liquido sostituire dp a dq e dr, e così diverranno

$$\rho X = \frac{dp}{dx}, \quad \rho Y = \frac{dp}{dy}, \quad \rho Z = \frac{dp}{dz}.$$

Le quali moltiplicate ordinatamente per dx, dy, dz, e poi

addizionate ci daranno

$$\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz=\rho(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz),$$

ossia

$$dp=\rho(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz).$$

128. Quest'ultima equazione esprime la condizione, a cui dovranno soddisfare le forze interiori X, Y, Z, la densità ρ e la pressione p (le quali tutte riguardiamo come speciali funzioni delle coordinate dei diversi punti di una massa liquida), perchè l'equilibrio abbia luogo. E poichè dp è un differenziale esatto, dovrà esserlo ancora $\rho(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$; quindi conformemente alle regole del calcolo integrale, ρ, X, Y, Z dovranno soddisfare alle equazioni

$$\frac{d(\rho\mathrm{X})}{dy}=\frac{d(\rho\mathrm{Y})}{dx},\quad\frac{d(\rho\mathrm{X})}{dz}=\frac{d(\rho\mathrm{Z})}{dx},\quad\frac{d(\rho\mathrm{Y})}{dz}=\frac{d(\rho\mathrm{Z})}{dy},$$

le quali nel caso di ρ costante divengono

$$\frac{d\mathrm{X}}{dy}=\frac{d\mathrm{Y}}{dx},\quad\frac{d\mathrm{X}}{dz}=\frac{d\mathrm{Z}}{dx},\quad\frac{d\mathrm{Y}}{dz}=\frac{d\mathrm{Z}}{dy}.$$

Questa condizione, a cui debbono soddisfare le forze X, Y, Z perchè sia possibile l'equilibrio della massa fluida sulla quale agiscono, ha realmente luogo nelle forze naturali, che consistono in attrazioni o ripulsioni dipendenti dalle mutue distanze delle molecole, o da quelle che le separano dai centri a cui vanno applicate le risultanti delle loro reciproche azioni.

129. Cercando in una massa fluida la serie dei punti ai quali corrisponda un medesimo valore di p, ne troviamo definito il luogo geometrico dall'equazione

$$\rho(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)=0,$$

ossia

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

non potendosi supporre $\rho = 0$. Il luogo geometrico dei punti che soffrono una stessa pressione, è dunque una superficie, conosciuta sotto il nome di *superficie di livello.* Essa gode della notevole proprietà di avere in ogni punto la risultante delle forze diretta secondo la normale; imperocchè supponendovi delineata una curva qualunque, i coseni degli angoli, che la tangente a qualsivoglia punto di questa curva farà cogli assi coordinati, saranno espressi da

$$\frac{dx}{ds}, \; \frac{dy}{ds}, \; \frac{dz}{ds}.$$

Coi medesimi assi la risultante R delle forze X, Y, Z farà degli angoli i cui coseni saranno

$$\frac{X}{R}, \; \frac{Y}{R}, \; \frac{Z}{R};$$

quindi il coseno dell' angolo formato dalla risultante e dalla tangente alla curva sarà espresso da

$$\frac{X}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{1}{Rds}(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Vale a dire che la risultante sarà diretta secondo la normale alla superficie di livello.

Inoltre se facciamo

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi,$$

sarà

$$dp = \rho d\varphi;$$

ed il 2° membro di questa ultima equazione non potrà essere differenziale esatto, se ρ, essendo variabile, non sia funzione di φ, ed in conseguenza p di ρ. Allora queste due quantità dovranno essere insieme variabili o costanti; e poichè p è

costante per tutte le superficie di livello che possiamo immaginare in una massa fluida, lo sarà anche ρ. In conseguenza nei fluidi compressibili, nei quali ρ dipende da p, possiamo indifferentemente definire per superficie di livello quella che in tutti i suoi punti soffre una stessa pressione, o che in ciascuno dei suoi punti presenta una stessa densità; e viceversa se in tali fluidi la densità è costante per una serie di punti, il loro luogo geometrico sarà una superficie di livello.

130. Poichè la risultante delle forze agenti sopra una massa fluida deve confondersi per ogni punto di una superficie di livello colla corrispondente normale, ne segue che se la massa non è sottoposta ad altre forze che a molecolari tendenze verso un centro, la superficie di livello sarà quella di una sfera, il cui raggio sarà determinato dal volume del fluido: tale sarebbe la superficie del mare, se il moto di rotazione della terra non introducesse una forza centrifuga funzione della latitudine. E se le forze agenti sulle molecole del fluido fossero parallele, la superficie di livello sarebbe un piano normale alla comune direzione delle forze: così vediamo la superficie delle acque stagnanti confondersi sensibilmente col piano orizzontale del luogo di osservazione, essendo quasi che parallele le direzioni della gravità nelle piccole distanze orizzontali.

Dagli stessi principî segue ancora che equilibrandosi in uno stesso recipiente più liquidi insolubili l'uno nell'altro, le loro superficie di separazione dovranno esser piane ed orizzontali. Ed in vero dovendo esser piana ed orizzontale la superficie libera del liquido sovrastante a tutti gli altri, ogni sezione, che vi sarà fatta da un piano orizzontale, soffrirà pressione costante in tutti i suoi punti, e sarà in conseguenza una superficie di livello: la più bassa di queste sezioni giacerà necessariamente nella superficie che lo separa dal liquido sottoposto; questa superficie sarà dunque piana ed orizzontale.

Purtuttavia questa condizione potrebbe esser soddisfatta,

senza che l' equilibrio rimanesse sicuro contro le cagioni che intervenissero a turbarlo. Affinchè in tal caso la massa fluida abbia tendenza di ritornare al primitivo equilibrio, fa d' uopo che il suo centro di gravità occupi il luogo più basso possibile (n° 83); ed è facile a comprendersi che questa condizione sarà soddisfatta nel solo caso che i liquidi siano soprapposti nell' ordine decrescente delle loro densità.

131. Poniamo che di una massa fluida interamente libera tutte le molecole siano animate da mutue tendenze reciprocamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze; e cerchiamo qual forma essa debba prendere nel suo equilibrio. Chiamando μ una molecola situata sulla superficie del fluido nel punto definito dalle coordinate α, β, γ, le componenti delle azioni X, Y, Z che essa riceverà da tutta la massa saranno espresse da

$$X=\mu\iiint\frac{\rho(x-\alpha)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Y=\mu\iiint\frac{\rho(y-\beta)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Z=\mu\iiint\frac{\rho(z-\gamma)dxdydz}{((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poichè i limiti di quest'integrali dipendono dalla forma, che assumerà il fluido, la quale è incognita, resteranno ancora incognite le componenti X, Y, Z. Ed in questo caso il mezzo che si offre alla soluzione del problema è quello di mettere a pruova le equazioni di diverse superficie per rinvenire quella che renderà soddisfatta la condizione

$$\rho(Xdx+Ydy+Zdz)=0.$$

Così supponendo che la figura sferica sia quella dell' equilibrio, avremo che nel caso di ρ costante la risultante R di tutte le azioni della massa sopra una molecola situata sulla

superficie sarà espressa (n° 118) da

$$R = \tfrac{4}{3}\pi\mu\rho r\,;$$

e di quest'azione risultante le componenti parallele agli assi, di cui poniamo l'origine nel centro della sfera, saranno

$$X = \tfrac{4}{3}\pi\mu\rho x\,,\quad Y = \tfrac{4}{3}\pi\mu\rho y\,,\quad Z = \tfrac{4}{3}\pi\mu\rho z\,;$$

quindi

$$Xdx + Ydy + Zdz = \tfrac{4}{3}\pi\mu\rho(xdx + ydy + zdz).$$

Ma dall'equazione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ abbiamo

$$xdx + ydy + zdz = 0\,;$$

sarà dunque

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0\,,$$

e la superficie sferica sarà soddisfacente alla condizione di equilibrio della massa fluida.

Mercè questo risultamento possiamo comprendere — 1° Perchè le piccolissime masse liquide, come i globetti di mercurio, le gocce di acqua ec. assumano forme sferiche; — 2° Come dall'osservare nei pianeti una forma sferoidale con depressione ai poli siasi arguito che un tempo questi corpi siano stati fluidi, donde poi pel successivo raffreddamento della loro massa siano passati all'attuale solidità.

132. Lasciando le molecole di un liquido sottoposte alla sola forza che ad esse comunica la gravità, e considerandone la massa estesa tra i limiti in cui è concesso di riguardare questa forza come agente in direzioni parallele, la faccia superiore del liquido equilibrato in un recipiente sarà piana ed orizzontale. In questa riponendo il piano delle xy, e numerando le z positive dall'alto in basso, avremo che le tre componenti della forza motrice parallele agli assi saranno $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, chiamando g l'intensità molecolare della forza di gravità. Così l'equazione ge-

nerale dell' equilibrio dei fluidi applicata al caso dei liquidi pesanti diviene

$$dp = g\rho dz,$$

donde nell' ipotesi di ρ indipendente da p, come è dei liquidi, si deduce

$$p = g\rho z + C.$$

Nella quale equazione facendo $z = 0$, si avrà $C = \pi$ pressione dell' atmosfera sulla faccia superiore del liquido; e l' integrale completo diverrà

$$p = g\rho z + \pi.$$

Considerando p nella sola sua dipendenza da g, ρ e z, avremo che la pressione fatta dal liquido sull' unità di superficie situata nel piano orizzontale condotto alla profondità a sotto la faccia di livello, sarà espressa da $g\rho a$; quindi la pressione P esercitata sull' area orizzontale b alla stessa profondità a sarà data dall' equazione

$$P = g\rho ab.$$

Or il prodotto ab esprime il volume di una colonna liquida avente l' altezza a e la base b; del quale volume ρab è la massa, e $g\rho ab$ n' è il peso. In conseguenza la pressione fatta da un liquido sopra un fondo orizzontale, pareggia il peso di una colonna dello stesso liquido avente per base l'area del fondo, e per altezza quella del liquido sovrastante.

È dunque la pressione fatta sul fondo indipendente dalla forma del recipiente; e perciò i tre vasi A, B, C (*fig. 93)*, che si suppongono avere i loro fondi egualmente estesi, ed esser pieni ad eguali altezze di un medesimo liquido, soffriranno sulle loro basi eguali pressioni. Nel vase B il peso della colonna liquida, che deve rappresentare il valore della pressione fatta sul fondo, pareggia il peso di tutto il liquido. Nel vase A il primo peso è minore del secondo, e

di questa differenza è facile intendere la ragione, osservando che porzione del peso del liquido è sostenuto dalle pareti laterali. Ed in vero immaginando elevato sul contorno della base il prisma retto *pmnq*, avremo diviso il liquido in una colonna centrale ed in due masse laterali contenute negli spazi *smp* ed *ntq*; e le pressioni che queste masse eserciteranno sulla colonna centrale, dovendo essere normali alle superficie di contatto, risulteranno parallele alla base *pq*, ed in conseguenza non vi avranno azione veruna. Nel vase C poi la pressione fatta sul fondo *pq*, equivalendo al peso della colonna liquida *pmnq*, sarà maggiore del peso del liquido contenuto; e questo risultamento che fu denominato *paradosso idrostatico* quando l' idea di pressione si confondeva con quella di peso, non è che un corollario del principio di egual pressione, come vedremo nel n° 135.

Dietro queste considerazioni egli è facile determinare la pressione che soffrirà il fondo orizzontale di un vase che contenga diversi liquidi l' uno all' altro sovrapposti. Siano a, a', a'',.. le altezze dei liquidi cominciando dall' infimo, ρ, ρ', ρ'',... le loro densità, e b l' area del fondo. Il liquido che vi è ad immediato contatto, vi farà la pressione $g\rho ab$; quello, che lo sovrasta, trasmetterà pel suo mezzo sopra ogni unità superficiale del fondo la pressione $g\rho'a'$ ch' essa esercita sopra ogni unità del piano che lo separa dal liquido sottoposto; e quindi all' area b del fondo verrà trasfusa la pressione $g\rho'a'b$. Similmente il terzo liquido lo premerà colla forza $g\rho''a''b$, ec.; e così la pressione totale P sarà data dall' equazione

$$P = gb(\rho a + \rho' a' + \rho'' a'' + \ldots).$$

133. Passiamo ora a considerare il caso di una parete AB (*fig.* 54) inclinata all' orizzonte. La pressione fatta da un liquido sopra una superficie infinitesima essendo indipendente dalla sua inclinazione ai piani coordinati (n° 127), ogni elemento ω della superficie AB soffrirà una pressione

la quale diretta secondo la normale mz pareggerà il peso della colonna liquida sottilissima, di cui è base ω ed $mn = z$ è l' altezza. In conseguenza chiamando ρ la densità del liquido e g l' energia molecolare della forza di gravità, il valore della pressione elementare sarà $g\rho\omega z$; e la somma

$$\Sigma g\rho\omega z = g\rho\Sigma\omega z$$

delle pressioni elementari, estesa dal limite A al limite B, esprimerà la pressione totale sofferta dalla parete AB. Or immaginiamo che gli elementi della superficie AB divengano punti di applicazione di un sistema di forze parallele, ognuna delle quali sia espressa da ω. Chiamando A l' estensione della superficie AB, sarà la loro risultante $\Sigma\omega = A$; e la distanza Z del suo punto di applicazione, vale a dire del centro di gravità di AB, dal piano di livello AC sarà data dall' equazione

$$AZ = \Sigma\omega z,$$

nella quale introducendo il moltiplicatore $g\rho$, avremo

$$g\rho AZ = g\rho\Sigma\omega z.$$

Il secondo membro di quest' ultima equazione, poichè identico a quello trovato di sopra, esprime il valore della pressione fatta dal liquido sulla parete AB; questa pressione sarà dunque equivalente a $g\rho AZ$, vale a dire al peso di una colonna liquida avente per base la superficie bagnata AB e per altezza la distanza Z del suo centro di gravità dal piano di livello AC.

Supponendo che sia m il punto di applicazione della risultante di tutte le pressioni elementari fatte dal liquido sulla parete AB del recipiente, possiamo riguardare questa risultante come prodotta dall' azione congiunta di una forza verticale mn e di un' altra orizzontale ms. Chiamando α l' angolo BAC, la componente verticale sarà espressa da

$$R.\cos\alpha = g\rho ZA\cos\alpha,$$

e la orizzontale da

$$R sen\alpha = gpZA sen\alpha.$$

Or $A cos\alpha$ esprime la proiezione della superficie AB sul piano di livello; e poichè $ZA cos\alpha$ è il volume del tronco di prisma la cui base è AC (n° 42), sarà $ZA cos\alpha$ l'espressione del volume liquido che gravita sopra AB, e $gpZA cos\alpha$ ne sarà il peso. Dunque la componente verticale della pressione non è che il peso del volume liquido sovrastante alla superficie bagnata.

Similmente essendo $A sen\alpha$ la proiezione di AB sul piano verticale BC, e la proiezione del centro di gravità di AB essendo centro di gravità della proiezione $A sen\alpha$, saranno i due centri egualmente distanti dal piano di livello; e $gpZA sen\alpha$, ch'esprime la componente orizzontale della pressione fatta sopra AB, esprimerà ancora il valore della pressione che il liquido esercita sulla proiezione verticale della stessa AB. Laonde la spinta orizzontale di un liquido sopra una parete, comunque inclinata all'orizzonte, sarà sempre eguale alla pressione orizzontale che il liquido farebbe sulla proiezione di essa parete sopra un piano normale alla direzione della spinta. Donde segue che le pressioni prodotte da un liquido su due punti orizzontalmente opposti del contorno laterale del suo recipiente e lungo la retta che li unisce, saranno sempre eguali tra loro; ed è perciò che i recipienti, qualunque ne sia la forma, non ricevono dalla pressione dei liquidi veruna tendenza a modo orizzontale. Ma se nella continuità delle pareti laterali vi fosse interruzione per un'area ω, la pressione sul lato opposto diverrebbe eccedente di $gp\omega z$, z disegnando l'altezza del liquido sul centro di gravità di ω; e da un'egual forza e nella stessa direzione il recipiente sarebbe spinto al moto. Su questo mezzo di disquilibrio delle pressioni orizzontali dei liquidi poggia la costruzione delle così dette *macchine a reazione*.

134. Se poniamo $\alpha = 0$, AB farà parte del fondo orizzontale del recipiente; Z, che disegna la distanza del cen-

tro di gravità di AB dalla superficie di livello, allora diverrà altezza del liquido sovrastante al fondo; e la componente verticale $g\rho ZA\cos\alpha$ della pressione, divenendo $g\rho AZ$, esprimerà tutta la pressione fatta dal liquido sul fondo A. Dimodochè la misura della pressione fatta dai liquidi sulle pareti laterali dei loro recipienti, conviene ancora a quella esercitata sopra un fondo orizzontale; e l'espressione da cui è formolata, deve riguardarsi come l'enunciato della legge generale relativa alla quantità di pressione ingenerata dai liquidi.

135. Poniamo ancora che α sia compreso tra 90° e 180°; allora $g\rho ZA\cos\alpha$ assumendo un valore negativo, la componente verticale della pressione diverrà una spinta dal basso in alto: così se la parete AB *(fig. 94)* prendesse l'inclinazione BA' la componente *nm* diverrebbe *n'm'*. In questo risultamento sta la dichiarazione compiuta del paradosso idrostatico. Ed in vero, sia A'BED la forma del recipiente: il peso della colonna liquida BCED rappresenterà la pressione fatta sul fondo BD; in conseguenza questa pressione eccederà il vero peso del liquido di quanto peserebbe la massa dello stesso liquido che sarebbe contenuta nello spazio A'BC. Ma equivalente al peso della massa A'BC è la spinta verticale fatta dal liquido sulla parete BA'; dunque il vero volume liquido sarà dall'alto in basso spinto da una forza equivalente alla differenza di peso dei volumi BCED ed A'BC, vale a dire eguale al peso del volume A'BDE. Quindi è che la vera pressione fatta sul fondo BD non può esser dichiarata dalla bilancia, finchè il fondo non abbia una mobilità indipendente da quella delle pareti laterali.

136. Le pressioni che un liquido produce su i singoli punti di un piano inclinato all'orizzonte, equivalendo ai pesi delle colonne fluide infinitesime che vi sovrastano, saranno necessariamente crescenti dal limite superiore al limite inferiore del piano; ed il punto di applicazione di questo sistema di forze parallele diseguali, e che dicesi *centro di*

pressione, non potrà perciò coincidere col centro di gravità del piano bagnato, ma dovrà invece giacerne più basso. Nel caso che la figura del piano sia simmetrica rispetto ad una linea che togliamo ad asse delle x, e che la sua giacitura faccia risultare orizzontali le y definite dalla legge di simmetria; allora il centro di pressione dovrà cadere sull' asse delle x, e sarà facile definirne la posizione.

Sia *mn* (*fig.* 96), il piano di livello, e BAC la superficie bagnata dal liquido, la quale simmetrica rispetto alla AD presenti le y orizzontali, come BD, *rt*, ec. Dell' elemento di superficie $srtv = 2ydx$ chiamando z la distanza *kl* dal piano di livello, ne sarà $2\rho yzdx$ la pressione, ρ indicando la densità del liquido. Di tutte queste pressioni elementari; che sono altrettante forze parallele, prendendo i momenti rispetto all' asse delle y, ne avremo la somma espressa da $2\rho\int yzxdx$; la quale dovendo pareggiare il momento della risultante, ossia $2\rho\int yzdx$ moltiplicata per l' ascissa x_1 del centro di pressione, avremo

$$x_1 = \frac{\int yzxdx}{\int yzdx}.$$

La dipendenza di y da x, essendo definita dall' equazione della curva che limita il piano bagnato, non può essere dichiarata che nei casi di speciale applicazione della formola che assegna il valore di x_1; ma quella che unisce z ad x può ricevere un' espressione generale, poichè deriva dalla posizione dell' origine A, e dall' inclinazione dell' asse delle x al piano di livello. Chiamando c la distanza A*h* dell' origine dal piano di livello, e φ l' angolo complemento dell' inclinazione dell'asse AD allo stesso piano, abbiamo $z = Ah + lo = c + x\cos\varphi$; quindi

$$x_1 = \frac{c\int yxdx + \cos\varphi\int yx^2dx}{c\int ydx + \cos\varphi\int yxdx} \quad (b)$$

Dalla quale espressione si rileva — 1° Che facendo girare il

piano bagnato intorno al suo centro di gravità, senza che ne sia alterata l'orizzontalità delle y, il valore della pressione rimarrà costante; ma il suo centro, dipendendo da c e φ, muterà sito sull'asse delle x. — 2° Che facendo $c=0$, vale a dire ponendo l'origine nel piano di livello, x_1 diverrà indipendente da φ; e la posizione del centro sarà la stessa sotto qualunque inclinazione dell'asse delle x al piano di livello — 3° Che ponendo $\varphi=90°$, sarà

$$x_1=\frac{\int yxdx}{\int ydx};$$

ed il centro di pressione coinciderà col centro di gravità (n° 43).

Applicando la formola (b) alla determinazione del centro di pressione del triangolo, del parallelogrammo e del trapezio nell'ipotesi di $c=0$, avremo, chiamando a la lunghezza della linea di simmetria,

Pel triangolo col vertice in alto. . . . $x_1=\frac{3}{4}a$
Pel triangolo capovolto. . . . . . . $x_1=\frac{1}{2}a$
Pel parallelogrammo . . . . $x_1=\frac{2}{3}a$
Pel trapezio, di cui $2p$ e $2q$ siano le basi
parallele, e la prima in alto . . . . $x'=\frac{3q+p}{2q+p}\,a.$

I quali valori di x_1 rifermano essere il centro di pressione più basso del centro di gravità.

137. La legge di pressione dei liquidi sulle pareti dei recipienti conduce immediatamente alla conoscenza delle condizioni di equilibrio dei liquidi nei tubi comunicanti, e dei solidi immersi nei liquidi.

Siano A e B (*fig. 95*) due recipienti di forme e dimensioni qualunque, e comunicanti per mezzo del tubo C. Supponendo versato in essi un liquido e già in equilibrio, una falda qualunque mn del fluido contenuto nel tubo di comunicazione dovrà soffrire equali pressioni sulle due facce op-

poste; vale a dire che il liquido contenuto in A dovrà spingerla da sinistra a destra con forza eguale a quella con cui viceversa la spinge il liquido contenuto in B. Chiamiamo s l'area di ciascuna delle due facce della falda mn; e siano z e z' le distanze del centro di gravità di s dai piani donde sono terminate le masse liquide contenute nei recipienti A e B. Indicando ρ la densità del fluido, sarà $g\rho sz$ la pressione fatta su mn dal liquido contenuto in A, e $g\rho sz'$ quella prodottavi dal liquido di B. Dovrà dunque nello stato di equilibrio esser soddisfatta l'equazione

$$g\rho sz = g\rho sz',$$

donde $z = z'$. Quindi le superficie di livello che termineranno le masse liquide nei recipienti in comunicazione dovranno giacere in un medesimo piano orizzontale. E su questo principio poggia la costruzione della *livella ad acqua*.

Se poi le masse liquide, contenute nei recipienti A e B, avessero densità diverse, ed il tubo di comunicazione fosse così stretto da impedire le correnti, per mezzo delle quali, nella tendenza del sistema ad un equilibrio stabile, il liquido più leggiero sarebbe portato a galleggiare sul più pesante; allora, indicando con ρ e ρ' le densità dei due liquidi, la loro condizione di equilibrio sarebbe espressa dall'equazione

$$\rho z = \rho' z',$$

ossia

$$z : z' = \rho' : \rho.$$

Vale a dire che le distanze del centro di gravità della luce di comunicazione dai piani donde sono terminati i due liquidi, dovranno essere inversamente proporzionali alle loro densità. Il barometro, a cagion di esempio, pone in comunicazione il mercurio che racchiude con tutta l'atmosfera terrestre; e se questa avesse fino al suo limite superiore la densità che possiede alla superficie del suolo, si potrebbe,

mercè un quarto proporzionale, dedurne l'altezza da quella della colonna barometrica e dalla sua densità comparata a quella del mercurio.

138. Passiamo infine a considerare le condizioni di equilibrio dei gallegianti, le quali, come abbiamo accennato nel n° precedente, non sono che un corollario della legge di pressione dei liquidi sulle pareti dei recipienti. Sia AB (*fig. 97*) il livello del liquido, e C il corpo immerso: la pressione che questo riceverà sopra un elemento ω della sua superficie, giacente nel punto M e distante di z dal piano di livello AB, sarà espressa da $g\rho\omega z$. La quale pressione, diretta secondo la normale MN, immaginiamo decomposta in due, l'una secondo l'orizzontale MS, l'altra secondo la verticale MH. La prima ne incontrerà un'altra eguale ed opposta nel secondo punto d'incontro M' dell'orizzontale MS colla superficie del corpo (n° 127); il quale non avrà perciò veruna tendenza a muoversi lungo la retta MS, e per la stessa ragione non ne avrà rispetto ad ogni altra orizzontale. La componente verticale poi, che sarà espressa da $g\rho z\omega\cos\varphi$, chiamando φ l'angolo NMH, equivale al peso di una colonna liquida avente per base la proiezione orizzontale mn dell'elemento $Mm = \omega$, il cui valore è $\omega\cos\varphi$, e per altezza la distanza z dello stesso elemento dalla superficie di livello. Or immaginando che sull'elemento Mm si appoggi un prisma verticale, questo intersecando di nuovo la superficie del corpo immerso in M'', ivi determinerà un altro elemento di superficie, la cui proiezione orizzontale essendo eguale ad mn, il liquido lo premerà dall'alto in basso con forza eguale al peso $g\rho z'\omega\cos\varphi$ della colonna liquida che ha la base eguale ad mn, e per altezza la distanza z' del punto M'' dalla superficie AB. L'elemento solido dunque compreso tra gli elementi di superficie M ed M'' sarà spinto in alto da una forza il cui valore è $g\rho(z-z')\omega\cos\varphi$, vale a dire da una forza equivalente al peso di una colonna liquida eguale in volume all'elemento solido; e poichè un simile

effetto dovrà aver luogo in ogni altro elemento prismatico verticale del corpo immerso, la somma delle spinte dovrà pareggiare il peso del volnme liquido discacciato dal solido. La quale somma di spinte, perchè diretta in senso opposto a quello della gravità, dovrà diminuire d'altrettanto il peso del corpo immerso; e perciò questo risultamento delle pressioni elementari è ancora formolato nel seguente modo: *un corpo immerso in un fluido, vi perde tanto del suo peso, quanto è quello del volume liquido discacciato.*

Laonde, dicendo V il volume del solido e ρ la sua densità rispetto a quella del liquido, il solido sarà spinto verticalmente dalla forza $gV(\rho-1)$; la quale andrà diretta dall'alto in basso, se $\rho>1$, e viceversa dal basso in alto nell'ipotesi che sia $\rho<1$. In questo ultimo caso, il solido verrà a galla emergendo in parte dal liquido; e la porzione che ne rimarrà immersa pareggerà il volume liquido equivalente in peso all'intero solido. Se in fine poniamo $\rho=1$, il solido rimarrà sospeso, qualunque sia la profondità alla quale siasi fatto discendere sotto la superficie libera del liquido.

Nei due casi di $\rho=1$ e $\rho<1$ il centro di gravità del corpo, a cui è applicata la risultante che ne costituisce il peso, ed il centro di gravità del volume liquido rimosso e ch'è il punto di applicazione della spinta risultante, dovranno giacere sopra una stessa verticale, affinchè le forze eguali ed opposte che vi sono applicate tengano il galleggiante in equilibrio. Quando sia $\rho=1$ ed il galleggiante fisicamente omogeneo, i due centri coincideranno, e l'equilibrio sarà indifferente; ma se il corpo fosse eterogeneo, ovvero quantunque omogeneo si avesse $\rho<1$, allora conformemente alla teorica dichiarata nel capo VII l'equilibrio sarà stabile se la spinta del liquido ed il peso del solido tendano ad aumentare la distanza dei loro punti di applicazione, ed instabile viceversa se tendano a diminuirla.

Nell' ipotesi di un galleggiante eterogeneo, la cui densità media sia eguale a quella del liquido e che in conseguenza sia soddisfatta l' equazione $p=1$, il peso P (*fig. 98*), del solido e la spinta S del liquido tenderanno ad aumentare la distanza dei loro punti di applicazione g ed o, quando il primo di questi punti sia inferiore al secondo; ma se viceversa fosse il punto o inferiore a g, l' azione delle forze P S tenderebbe a diminuirne la distanza. Sarà dunque stabile l' equilibrio nel primo caso, ed instabile nel secondo.

Ma se fosse $p<1$, e che in conseguenza una parte del galleggiante rimanesse fuori del liquido, potrebbe il suo centro di gravità essere più alto di quello del volume liquido rimosso, senza che venisse a mancare la stabilità del suo equilibrio. Poniamo, ciò che maggiormente importa nell' applicazione alle costruzioni nautiche, che il galleggiante abbia un piano di simmetria rispetto alla forma e densità, il quale piano sia verticale nell' equilibrio, e perciò contenga sì il centro di gravità del solido che quello del volume liquido discacciato. Tutto ciò è rappresentato nella *fig. 99*, in cui AB disegna il piano di simmetria, CD quello del liquido, g è il centro di gravità del solido ed o quello del volume liquido BDC. Or poniamo che il galleggiante rimosso per poco dalla sua posizione di equilibrio, venga inclinato come rappresenta la *fig. 100*. Il piano di simmetria AB avrà trasportato nel suo movimento il centro g di gravità del solido; ma quello del volume liquido, non più simmetrico rispetto ad AB, si troverà in un punto o giacente fuori di questo piano. Così il peso del galleggiante e la spinta del liquido, che prima agivano in una stessa verticale, ora costituiscono una coppia, delle cui forze componenti l' una agisce in g, e l' altra può riguardarsi applicata nel punto d' incontro m della verticale oS col piano di simmetria AB. L' equilibrio era dunque stabile, poichè la coppia prodotta dal deviamento del galleggiante tende a restituirlo nella sua prima posizione. E quantunque questo risul-

tamento si presenti a prima giunta come opposto alla regola dichiarata nel n° 73, poichè le forze applicate in g ed o tendono a diminuire la distanza go; purtuttavia egli è facile ricondurlo a quella teorica, osservando che dall'ipotesi di esser piccolissimo l'angolo B*mo* segue dover essere anche piccolissimo l'avvicinamento del punto m al punto g, quando il corpo fa ritorno al suo luogo di equilibrio; laonde in questa giacitura del galleggiante il vero punto di applicazione della spinta operata dal liquido deve riguardarsi come superiore al centro g, e così la stabilità dell'equilibrio si troverà unita colla tendenza delle forze a separare i loro punti di applicazione m e g.

Ma se per lo spostamento prodotto nel galleggiante, il centro o di gravità del volume liquido rimosso si trovasse giacere rispetto al centro g di gravità del solido come indica la *fig. 101*, allora la coppia P,—S tenderebbe a vieppiù allontanarlo dal primo luogo, e perciò l'equilibrio ne sarebbe stato instabile; ciò ch'è conforme alla tendenza che le due forze avrebbero di avvicinare i loro punti di applicazione.

Da quanto abbiamo detto in questo n° si rileva — 1° che la possibilità di un equilibrio stabile o instabile suppone necessariamente un cangiamento nella forma e quindi nella posizione del centro di gravità del volume liquido rimosso. Laonde se la forma di questo volume liquido potesse rimaner invariata, l'equilibrio sarebbe indifferente; e tale sarebbe il caso di un solido di rotazione che nel galleggiamento conservando orizzontale il suo asse, per un deviamento angolare intorno a questo asse venisse allontanato dal suo luogo di equilibrio — 2° Che restando alterata per moto comunicato al galleggiante la forma del volume liquido rimosso, la stabilità o instabilità dell'equilibrio dipenderà dall'essere più alto o più basso di g il punto d'incontro m della verticale oS col piano di simmetria AB; quale punto d'incontro ha ricevuto da Bouguer il nome di *metacentro*. In conseguenza quelle condizioni che ci assicureranno di essere il metacentro

superiore al centro di gravità del galleggiante, ci faranno ancora certi della stabilità del suo equilibrio; ed in altro luogo vedremo quali relazioni dovranno aver luogo tra i dati del problema, perchè una tal condizione sia soddisfatta.

CAPO DECIMOTERZO.

Equilibrio dei fluidi aeriformi.

Definizione dei fluidi aeriformi — Applicazione dell'equazione generale di equilibrio di una massa fluida al caso dei fluidi aeriformi — Espressione della loro forza elastica — Necessità di una temperatura uniforme in tutta l'estenzione di ogni strato di livello per l'equilibrio di una massa fluida aeriforme. Cagione dei venti costanti e periodici — Equazione di equilibrio di una colonna atmosferica — Essa ci farebbe riguardare l'atmosfera come illimitata, se la terra non avesse moto di rotazione — Metodo di livellazione dedotto dall'equazione di equilibrio di una colonna atmosferica.

139. L'ultima ipotesi che ci rimane a fare sul modo di coesistenza dei punti di applicazione di un sistema di forze è quella di supporli animati da reciproca ripulsione, variabile secondo una certa funzione della mutua distanza in cui può tenerli l'azione delle forze impresse. Tutti i corpi aeriformi, denominati ancora *fluidi elastici* [1], offrono una realtà obbiettiva a questo concetto ipotetico; e la loro compressibilità, che l'esperienza ha dichiarato esser tra certi limiti direttamente proporzionale alla quantità della forza pre-

[1] Questa denominazione, da molti adottata, è del tutto impropria, non essendo riposto in altro il carattere distintivo dei fluidi aeriformi che nella mutua ed indefinita ripulsione delle loro molecole. Nè l'elasticità, ossia stabilità di equilibrio molecolare, è propria della fluidità aeriforme: in grado eminente la posseggono ancora i liquidi, come è chiaro dal fatto della grande celerità con cui i suoni vanno trasmessi pei corpi di questa ultima classe.

mente [1], è già un' espressione implicita dell' intensità della forza ripulsiva in funzione della distanza molecolare.

140. Questo dato sperimentale, conosciuto sotto il nome di *legge di Mariotte*, e che dichiara la dipendenza della densità ρ di un fluido aeriforme dalla pressione p a cui soggiace, ci somministra l' equazione

$$p = k\rho,$$

k disegnando il fattore di proporzionalità. Quindi l' equazione generale (n° 128)

$$dp = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \rho d\varphi,$$

ch' esprime la condizione di equilibrio di una massa fluida qualunque, converrà soltanto ai fluidi aeriformi se in essa sostituiremo a ρ il valore di questa variabile tratto dall' equazione precedente. Avremo così

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k},$$

donde

$$\overset{e}{log}.p = \int \frac{d\varphi}{k} + \mathrm{C}, \text{ e } p = \mathrm{A}e^{\int \frac{d\varphi}{k}},$$

A disegnando il numero di cui la costante C è logaritmo.

Il fattore k, che serve ad indicare la proporzionalità di p a ρ, è vario secondo la speciale natura del fluido, e per un medesimo fluido varia secondo la temperatura. Togliendo dall' esperienza il valore di k in quanto che dipende dalla natura del fluido, sarà facile esprimerne la dipendenza dal grado di calore. Chiamiamo α il caefficiente di dilatazione del fluido, e t il suo grado termometrico; avremo che sotto una pressione costante p_0 il volume del fluido, ch'era V al

[1] Ved. la mia Fisica — tom. 1 — pag. 266.

grado 0°, diverrà alla temperatura t

$$V' = V(1+\alpha t).$$

Or perchè il volume V' torni ad esser V senza che il fluido patisca cangiamento di temperatura, sarà d'uopo che in virtù della legge di Mariotte la pressione p_0 divenga

$$p = p_0(1+\alpha t).$$

Ma ritenendo le notazioni k e ρ come relative al grado 0°, avremo

$$p_0 = k\rho\ ;$$

quindi

$$p = k\rho(1+\alpha t)$$

sarà la funzione che dovrà esprimere la dipendenza di k dalla temperatura t del fluido, e dal rapporto $\frac{p}{\rho}$ dipendente dalla sua natura e che l'esperienza avrà definito pel grado 0° di calore. E poichè la pressione p, che ha luogo in un punto qualunque di una massa aeriforme, fa equilibrio alla tensione o forza elastica ivi esistente, perciò la funzione $k\rho(1+\alpha t)$ esprime ancora il valore di quest'ultima forza.

141. Togliendo dall'ultima equazione il valore di ρ e sostituendolo in $dp = \rho d\varphi$, questa diverrà

$$dp = \frac{p d\varphi}{k(1+\alpha t)}\ ;$$

il cui 1° membro essendo un differenziale esatto, dovrà esserlo ancora il 2°, vale a dire che t al pari di p dovrà essere funzione di φ; e poichè φ è costante per tutta l'estensione di uno strato di livello, ivi dovrà essere costante ancora t. Or se la terra non avesse moto di rotazione, gli strati di livello dell'atmosfera avrebbero forma sferica; ma la rotazione facendo decrescere la gravità dai poli all'equatore, fa sì che gli strati di pressione costante abbiano la forma di

un' ellissoide depressa. Quindi è che supponendo l' atmosfera in equilibrio, la temperatura dovrebbe essere uniforme per ognuno di questi strati ellissoidali, essendovi costante la funzione φ. Ma l' azione termica dei raggi solari, variando secondo la latitudine e le stagioni, si oppone ad una tale uniformità di temperatura; e così ostando continuamente all'equilibrio atmosferico, vi mantiene quell' agitazione perenne in cui risiede la cagion prima dei venti costanti e periodici.

142. Ritorniamo all' equazione generale

$$dp = \rho d\varphi ,$$

ed applichiamola alla determinazione delle condizioni di equilibrio di una colonna atmosferica. Poniamo il piano delle xy in quello che costituisce il livello del mare pel punto di osservazione, e contiamo le z positive dal basso in alto. Chiamando g la forza di gravità, avremo che in $d\varphi = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ sarà $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{Y}=0$, $\mathrm{Z}=-g$; quindi l' equazione generale di equilibrio diverrà

$$dp = - g\rho dz.$$

Essendo $vg\rho$ l' espressione del peso di un corpo di cui v indica il volume e ρ la densità, il fattore $g\rho$ dell' ultima equazione esprimerà il peso dell' unità di volume dell' aria nel luogo corrispondente alla pressione p. Or se chiamiamo π il peso dell' unità di volume per l' aria che trovandosi alla temperatura 0° e sotto la pressione barometrica 0^m, 76, giacesse sotto la latitudine di 45° ed a livello del mare; quando poi la temperatura sarà t, p la pressione, λ la latitudine e z l' altezza del luogo sul livello del mare, il peso π diverrà

$$\pi \frac{p}{0^m,76\Pi} \cdot \frac{1-0,002566 \cos 2\lambda}{1+0,003665t} \cdot \frac{r^2}{(r+z)^2} ,$$

nella quale espressione Π disegna il peso dell' unità di volu-

me del mercurio, ed r il valore medio del raggio terrestre. Ed in vero, il peso dell' unità di volume di un corpo dovendo variare nella stessa ragione della densità, avremo primieramente che in conseguenza della legge di Mariotte il peso π dell'unità di volume dell'aria sotto la pressione $0^m,76\Pi$ diverrà

$$\pi \frac{p}{0^m,76\Pi}$$

sotto la pressione p. E ciò nell' ipotesi della temperatura 0°: ma questa elevandosi al grado t, il volume dell'aria (come è noto in Fisica) varierà nel rapporto di $1 : 1+0,003665t$. In ragione inversa dovrà procedere la sua densità, e quindi il peso dell' unità di volume; π dunque dovrà essere ancora moltiplicato per

$$\frac{1}{1+0,003665t}.$$

Inoltre, da tutte le ricerche finora eseguite sulla dipendenza della gravità dalla latitudine del luogo di osservazione si è dedotto che prendendo ad unità il valore di questa forza alla latitudine di 45°, ne sarà $1-0,002566\cos 2\lambda$ la quantità corrispondente alla latitudine λ [1]. Nella stessa ragione varierà la grandezza della pressione $0^m,76\Pi$ sotto la quale si è determinato il peso π; quindi la legge di Mariotte richiederà l' introduzione del fattore

$$1-0,002566\cos 2\lambda.$$

Di più osserviamo che la gravità decrescendo in ragione dei quadrati delle distanze dal centro della terra, il suo valore alla distanza $r+z$ da questo punto sarà $\frac{r^2}{(r+z)^2}$, quando si prenda ad unità la sua grandezza alla distanza r. In con-

[1] Ved. la mia Fisica — Tom. 1. *pag.* 263.

seguenza la pressione $0^m,76\Pi$ divenendo $0^m,76\Pi\frac{r^2}{(r+z)^2}$ alla distanza $r+z$, farà decrescere nella stessa ragione il valore di ϖ; vale a dire che sarà ancora necessaria l'introduzione del fattore

$$\frac{r^2}{(r+z)^2}$$

In fine è da osservarsi che il valore ϖ non si potrebbe riguardare come costante, se non fosse determinato sperimentando su aria perfettamente secca: ma nell'atmosfera vi ha sempre del vapore aqueo, variabile in quantità secondo la temperatura, il clima, ec.; ϖ dunque deve ancora ricevere una correzione rispetto allo stato igrometrico dell'aria. E poichè l'Igrometria insegna come poter determinare la tenzione f del vapore esistente nell'atmosfera, noi riguarderemo questa quantità come un dato sperimentale. Ciò posto, se il vapore atmosferico sostiene la parte f della pressione p prodotta nel punto di osservazione, l'aria ivi soffrirà la pressione $p-f$, e nell'unità di volume ne sarà contenuto il peso $\varpi\frac{p-f}{0^m,66\Pi}$. A questo peso bisognerà aggiungere quello del vapore che vi è diffuso; e poichè la densità del vapore per eguale pressione e temperatura è 0,624 di quella dell'aria, sarà $0,624\,\frac{\varpi f}{0^m,06\Pi}$ il peso del vapore contenuto nell'unità di volume. Quindi il peso di questa unità per l'aria contenente vapore colla tensione f, sarà

$$\varpi\,\frac{p-f}{0^m,76\Pi}+0,624\,\frac{\varpi f}{0^m,76\Pi}=\varpi\,\frac{p-0,376f}{0^m,76\Pi}\,.$$

Mercè tutte queste correzioni l'equazione di equilibrio di una colonna atmosferica diviene

$$dp=-\varpi\,\frac{p-0,376f}{0^m,76\Pi}\cdot\frac{1-0,002566\cos 2\lambda}{1+0,003665t}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2}\,dz\,,$$

che divisa nei due membri per p, e poi integrata ci dà

$$\overset{e}{log}.p = C - \frac{\pi}{\Pi} \cdot \frac{1-0{,}002566 cos 2\lambda}{0^m{,}76} \int \frac{1-0{,}376\frac{f}{p}}{1+0{,}003665t} \cdot \frac{r^2}{(r+z)^2}\, dz.$$

Perchè questa integrazione indicata potesse eseguirsi sarebbe necessario conoscere quali funzioni di z dovranno rappresentarci f e t. L'osservazione ha dichiarato che la temperatura ed il vapore atmosferico decrescono a misura che il punto di osservazione si allontana dal livello del mare, ma la legge di questa diminuzione è tuttavia ignota. Per supplire a questo dato ed in modo da rendere l'errore più piccolo possibile noi sostituiremo a t, f, p (poichè f è ancora funzione di p) le medie aritmetiche dei loro valori osservati nelle altezze 0 e z; e facendo $p_1 = \frac{p_0+p}{2}$, $f_1 = \frac{f_0+f}{2}$, e $t_1 = \frac{t_0+t}{2}$, potremo sottrarre dal segno $\int$ le espressioni $1-0{,}376\frac{f_1}{p_1}$ ed $1+0{,}00366t_1$. Quindi poniamo

$$\frac{\pi}{\Pi} \cdot \frac{1-0{,}002566 cos 2\lambda}{0^m{,}76} \cdot \frac{1-0{,}376\frac{f_1}{p_1}}{1+0{,}003665t_1} = A\,,$$

e sarà

$$\overset{e}{log}.p = C - A\int \frac{r^2 dz}{(r+z)^2} = C + \frac{Ar^2}{r+z}\,.$$

Per determinare la costante C faremo $z=0$; sarà p_0 il valore della corrispondente pressione, e

$$C = \overset{e}{log}.p_0 - Ar\,;$$

donde

$$\overset{e}{log}.p = \overset{e}{log}.p_0 - Ar + \frac{Ar^2}{r+z} = \overset{e}{log}.p_0 - \frac{Arz}{r+z}\,,\ (1)$$

e

$$p=p_0 e^{-\frac{Arz}{r+z}}.$$

143. Da quest' ultima equazione si rileva che se la terra non avesse moto di rotazione, l'atmosfera non avrebbe limite, poichè p non diverrebbe nulla neppur nell'ipotesi di $z=\infty$, ma soltanto assumerebbe il valore costante $p_0 e^{-Ar}$. Ad una tale estensione senza fine si opporrebbe il fatto della rotazione, la quale ingenerando nelle molecole dell' aria una forza centrifuga che aumenta in ragione della distanza dall' asse, disperderebbe negli spazî planetarî quella porzione di atmosfera che si trovasse giacere oltre il limite, che rende la gravità eguale alla forza centrifuga. Chiamando g la prima, vedremo nel libro seguente che la seconda ha il valore $\frac{g}{289}$ sull' equatore terrestre, e nello stesso piano ed alla distanza z dal livello del mare avrà quello di $\frac{g(r+z)}{289r}$. Or per la medesima altezza la forza di gravità è $\frac{gr^2}{(r+z)^2}$; quindi l' atmosfera troverà necessariamente un limite nell'altezza z determinata dall' equazione

$$\frac{r+z}{289r}=\frac{r^2}{(r+z)^2}$$

la quale dà

$$z=r(\sqrt[3]{289}-1)=5,6r.$$

Vale a dire che alla distanza di circa 5 volte e mezzo il raggio terrestre non vi può essere molecola di aria che faccia parte della nostra atmosfera.

144. Ponendo l' equazione (1) sotto la forma

$$\overset{e}{log}\,\frac{p_0}{p}=\frac{Arz}{r+z}$$

è chiaro che potremo sostituire alle pressioni p_0 e p le equivalenti altezze barometriche a_0 ed a, dopo averle corrette della differenza sì di temperatura che di energia della gravità nei due luoghi di osservazione. Ed in vero essendo $g(1-0{,}002566 cos 2\lambda)$ la forza di gravità sotto la latitudine λ ed alla distanza r dal centro terrestre, sotto la stessa latitudine ed alla distanza $r+z$ dallo stesso centro l'intensità della forza sarà $\frac{gr^2}{r+z}(1-0{,}002566 cos 2\lambda)$; quindi sarà $ga_0(1-0{,}002566 cos 2\lambda)$ il peso della colonna barometrica equivalente alla pressione p_0, e $\frac{gar^2}{(r+z)^2}(1-0{,}002566 cos 2\lambda)$ quello della colonna mercuriale che fa equilibrio alla pressione p. Laonde sarà

$$\frac{p_0}{p} = \frac{a_0}{a\frac{r^2}{(r+z)^2}} = \frac{a_0}{a}\left(1+\frac{r}{z}\right)^2$$

Ciò suppone che il mercurio avesse una stessa temperatura nelle due stazioni del barometro. Ma il grado di calore essendo più basso nella stazione superiore, ivi l'altezza della colonna barometrica sarà minore di quella che sarebbe stata nel caso di una temperatura uniforme. Chiamiamo T_0 e T le temperature del mercurio nelle due stazioni; se quello del barometro portato in alto passasse dal grado T al grado T_0, il suo volume aumenterebbe nel rapporto di

$$1 : \frac{1+\frac{T_0}{5550}}{1+\frac{T}{5550}} = 1 : 1+\frac{T_0-T}{5550},$$ trascurando come infinitesime le quantità di ordine superiore al primo. Quindi se il barometro superiore avesse avuto la stessa temperatura dell'inferiore, l'altezza a della colonna mercuriale sarebbe stata $a\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right)$. Bisognerà dunque aggiungere questo fattore al denominatore del 2° membro dell'equazione pre-

cedente, ovvero (ciò che torna lo stesso) il fattore $1+\frac{T-T_0}{5550}$ al numeratore; ed in conseguenza avremo

$$\frac{p_0}{p}=\frac{a_0}{a}\left(1+\frac{z}{r}\right)^2\left(1+\frac{T-T_0}{5550}\right),$$

e

$$\overset{e}{log}\frac{p_0}{p}=\overset{e}{log}\frac{a_0}{a}+2\overset{e}{log}\left(1+\frac{z}{r}\right)+\overset{e}{log}\left(1+\frac{T-T_0}{5550}\right).$$

Ma essendo nel sistema neperiano $\overset{e}{log}(1+x)=x$ nel caso che x rappresenti una piccolissima frazione, avremo prossimamente $\overset{e}{log}\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{z}{r}$, e $\overset{e}{log}\left(1+\frac{T-T_0}{5550}\right)=\frac{T-T_0}{5550}$, e passando ai logaritmi decimali, il cui modulo è 0,434295, sarà

$$log\left(1+\frac{z}{r}\right)+log\left(1+\frac{T-T_0}{5550}\right)=0,434295\left(\frac{T-T_0}{5550}+2\frac{z}{r}\right).$$

quindi

$$log\,\frac{p_0}{p}=log\,\frac{a_0}{a}+0,434295\left(\frac{T-T_0}{5550}+2\frac{z}{r}\right).$$

Or l'equazione (1) non esiste che nel sistema neperiano; perciò volendovi sostituire a $\overset{e}{log}\,\frac{p_0}{p}$ una funzione equivalente in logaritmi decimali, bisognerà moltiplicarli pel modulo $M=\frac{1}{0,434295}=2,302585$ per mezzo del quale i logaritmi del 2° sistema riproducono quelli del 1°. Quindi l'equazione (1) si ridurrà a

$$M\left[log\frac{a_0}{a}+0,434295\left(\frac{T-T_0}{5550}+2\frac{z}{r}\right)\right]=\frac{Arz}{r+z};$$

mercè la quale potremo calcolare l'altezza z sul livello del

mare per ogni punto accessibile, conoscendo le altezze che nello stesso tempo segneranno due barometri situati alla distanza r ed $r+z$ dal centro terrestre. A fine di rendere più agevole il calcolo, cominceremo dal riguardare come noti i valori di $r+z$ e $\frac{z}{r}$ e così avremo

$$z=\frac{M}{A}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left[log\frac{a_0}{a}+0,434295\left(\frac{T-T_0}{5550}+2\frac{z}{r}\right)\right];$$

indi riguardando come nullo il fratto $\frac{z}{r}$, avremo un primo valore approssimato di z, il quale poi sostituito nel 2° membro dell'equazione ci darà un secondo valore che meno del primo divergerà dal vero.

Nel coefficiente $\frac{M}{A}$ sostituendo ad A il suo valore dato nel n° 142, avremo

$$\frac{M}{A}=\frac{M\Pi.0^m,76}{\pi}\cdot\frac{(1+0,003665t_1)(1+0,002566cos2\lambda)}{1-0,376\frac{f_1}{p_1}}.$$

Or Biot ed Arago han trovato $\frac{\Pi}{\pi}=10466,8$; quindi

$$\frac{M\Pi.0^m,76}{\pi}=18316^m,5$$

e la formola della livellazione barometrica diviene

$$Z=18316^m,5\frac{(1+mt_1)\left(1+\frac{z}{r}\right)(1+n.cos2\lambda)}{1-0,376\frac{f_1}{p_1}}\left[log\frac{a_0}{a}+0,434295\left(\frac{T-T_0}{5550}+2\frac{z}{r}\right)\right],$$ [1]

facendo $m=0,003665$ ed $n=0,002566$.

[1] Primo ad attuare il concetto di Pascal sulla possibilità di una altimetria barometrica fu Halley, scovrendo la legge che se le

Questa formola suppone che la stazione inferiore sia a livello del mare: purtuttavia è frequente il caso di esserne di-

distanze del suolo crescono in progressione aritmetica, le densità delle falde di aria e quindi le corrispondenti altezze della colonna barometrica decresceranno in progressione geometrica. Questa legge, che Halley deduceva dalle proprietà dell'iperbole, non è che un corollario immediato dell'equazione

$$\frac{p_0}{p} = e^{\frac{Arz}{r+z}},$$

quando si trascuri z rispetto ad r e si ponga uniforme la temperatura in tutta l'altezza della colonna atmosferica. Nella mia Fisica (*tom. I. pag. 272*) ho dichiarato come si possa facilmente dedurre dalla legge di Halley la formola da tutti adottata per misurare le altezze mercè le osservazioni barometriche, riguardando però come un dato di osservazione il coefficiente 18336^m, di cui essa è provveduta. Or qui nel testo si legge in vece il coefficiente $18316^m,5$; e di questa differenza passo a dar ragione.

Halley, scovrendo la proporzionalità suindicata, non solo conobbe, ciò ch'era evidente, la necessità di un coefficiente che dovesse moltiplicare la differenza dei logaritmi delle altezze barometriche, ma comprese ancora la necessaria dipendenza di questo fattore dal rapporto della densità del mercurio a quella dell'aria. Parecchi fisici dopo Halley tolsero a voler perfezionare il nuovo metodo di livellazione, e fra gli altri si distinse il Deluc per la semplicità del metodo che propose per ridurre le osservazioni ad una certa temperatura media ch'egli riguardò come normale. La regola di Deluc fu da tutti adottata, ma poi divenne una semplice cognizione storica dopo che la formola data da Laplace nella sua Meccanica Celeste ebbe ampiamente dichiarato quanto in simili ricerche i metodi razionali valessero più che i precetti dell'empirismo.

Or l'illustre geometra francese, partendo dai dati che aveva sul rapporto della densità del mercurio a quella dell'aria (rapporto che fu poi trovato eguale a 10466,8 da Biot ed Arago, e che meriterebbe nuovo esame dopo la correzione apportata al coefficiente di dilatazione dell'aria dalle ricerche di Magnus e di Regnault) otteneva il coefficiente $17972^m,1$. A di lui richiesta Ramond compa-

versa. Ma se l'altezza z della stazione superiore è per lo più trascurabile rispetto al raggio terrestre, tanto più dovrà esserlo quella dell' inferiore.

FINE DELLA STATICA.

rando i risultamenti trigonometrici a quelli che dava la formola rispetto a diverse altezze tolte nella catena dei Pirenei, trovava in vece il coefficiente 18336^m, il quale poi dovea portarsi a 18393^m, quando si voleva trascurare la frazione $\frac{z}{r}$. Il primo di questi due coefficienti, come quello che al merito di non far trascurare verun elemento della formola univa il pregio di un dato sperimentale, richiamò l'attenzione di quanti poi scrissero sulla livellazione barometrica; e Poisson fu tra i primi a volerlo dedurre direttamente dal rapporto meglio conosciuto della densità del mercurio a quella dell'aria, e dal supporre che questa contenesse un certo valore medio del vapore di cui sarebbe saturata alla temperatura 0.° E poichè le ricerche primieramente di Saussure indi di Dalton sulla dipendenza del vapore dall'aria in cui è diffuso, avevano dichiarato che la quantità che può contenerne l'atmosfera non è che una funzione della sua temperatura, così fu stimato di tenerne conto abbastanza portando a 0,004 il coefficiente di dilatazione dell' aria che Volta e poi Gay-Lussac avevano fissato a 0,00375: e Biot nell' introduzione alle tavole barometriche da lui pubblicate cerca dimostrare l' esattezza della compensazione apportata dal coefficiente 0,004. Intanto Ramond dava i seguenti precetti sull' uso della formola barometrica.

« 1.° Si può sperare di ottenere un giusto valore dell' altezza, « quando l'osservazione sarà fatta a mezzogiorno, durante un tem- « po calmo che non abbia decisa tendenza ad un cangiamento e « che i due barometri siano sopra sommità isolate, o che il baro- « metro inferiore si trovi in una spaziosa pianura ed a mediocre « distanza orizzontale dall' altro. In quest' ultimo caso sarebbe me- « glio che la distanza fosse più grande, anzichè di avere il baro- « metro situato al piede dei monti, ove il vantaggio di una pros- « simità maggiore sarebbe più che compensato dall' azione pertur- « batrice dei venti discendenti. Mancando queste circostanze emi- « nentemente favorevoli, gli errori non più avranno misura fissa, « e perciò non potranno esser corretti che mediante quel valore

LIBRO SECONDO.

DINAMICA.

CAPO PRIMO.

Introduzione.

Diversi aspetti sotto cui può considerarsi il moto — Moto rettilineo e curvilineo: uniforme e vario — Velocità. Leggi del moto uniforme — Espressione della velocità nel moto vario — Misura delle forze continue — Forza acceleratrice: forza motrice — Parallelogrammo delle velocità.

145. Il moto, obbietto della Dinamica, può esser riguardato sotto un duplice aspetto; o semplicemente come feno-

« che la perizia dell' osservatore saprà assegnare alle cagioni pro-
« duttrici.
« 2.° I risultamenti dovranno, in generale, riguardarsi come
« minori del vero:
« Quando l' osservazione sia fatta di mattino o di sera;
« Quando il barometro inferiore essendo in una pianura, il
« barometro superiore si trovi in una valle stretta e profonda;
« Quando spiri un forte vento australe;
« Quando l' atmosfera sia manifestamente tempestosa.
« 3.° Dovranno in vece riguardarsi come maggiori del vero,
« Quando si osservi tra mezzogiorno e le due o tre ore che
« seguono, specialmente di estate e che il sole non sia nascosto
« da nubi;

meno, o come fenomeno in dipendenza dalla sua cagione. Sotto il primo aspetto ci offre a considerare le leggi che

« Quando il barometro superiore essendo sulla sommità di « un monte, l'inferiore si trovi in una gola stretta e gagliarda- « mente dominata;

« Quando domini un vento forte boreale, specialmente al- « lorchè si è sopra una montagna e che il vento ne percuota il « fianco più ripido.

« 4.° In fine sono da presumersi errori grandi e variabili in ogni « senso, quando le differenze di livello siano poco considerevoli, « e che i due barometri siano situati in una stessa pianura o val- « le, o molto più quando siano situati in due valli separate da « una catena di monti. In questi casi è d'uopo che la distanza o- « rizzontale dei due strumenti sia la più piccola possibile, e ciò « non ostante i soli valori medi di un gran numero di osservazio- « ni possono meritar fede ».

Da parte gli effetti delle agitazioni atmosferiche, che distruggendone l'equilibrio debbono far necessariamente divergere dal vero i risultamenti della formola barometrica; tutte le altre occasioni di errori indicate dal Ramond non sono che altrettante pruove della necessità di dover tener conto dell'umidità atmosferica in modo più esatto di quello che finora si è tenuto. Ed in vero il trovarsi il barometro superiore in una valle stretta e profonda; mentre l'inferiore è in una pianura, ovvero il secondo in una valle ed il primo sulla sommità di una montagna; ciò importa che a dati eguali sarà nel 1° caso la media delle temperature minore che nel 2°, e maggiore viceversa la media delle quantità di vapore atmosferico. Bisognerà dunque nel 1° caso un coefficiente maggiore di 18336 e minore nel 2°; vale a dire che nel 1° caso la sostituzione di 0,004 a 0,00375 non è bastata a compensare l'effetto del vapore, e nel 2° è stata eccedente. Lo stesso deve dirsi dell'influenza dell'ora di osservazione, poichè la temperatura dell'aria sia nell'avvicinarsi del sole al meridiano sia nel dipartirsene, varia più rapidamente della quantità di vapore che vi è diffuso. Nulla poi diciamo della dipendenza dei risultamenti dallo spirare del vento da ostro o da borea, essendo risaputa l'influenza del primo in accrescere e del secondo in diminuire la quantità del vapore atmosferico. Soltanto osserviamo che se nelle circostanze favorevoli la formola barometrica non ha dato risultamenti gran fatto diversi da quelli delle misure trigonometriche, ciò è dipeso dall'aver mi-

reggono le sue relazioni allo spazio ed al tempo ; e sotto il secondo ci presenta nella ragion semplice della velocità alla forza l' anello che deve riunire in un solo sistema scientifico la composizione delle forze e quella delle velocità, vale a dire la Statica e la Dinamica.

146. Il moto, riguardato in quanto al solo spazio, può essere *rettilineo* o *curvilineo*, secondochè la linea percorsa dal mobile è retta o curva : così è rettilineo il cammino di un grave che scende in un mezzo perfettamente tranquillo, e curvilineo in vece quello di un grave spinto in direzione obbliqua all' orizzonte. Ma se oltre alla forma della *traiettoria*, ossia linea di cammino del mobile, consideriamo lo spazio percorso nella sua relazione al tempo impiegato in percorrerlo, avremo da considerare due altre specie di moto, l' *uniforme* ed il *vario*. È uniforme il moto di un corpo che percorre spazî eguali in tempi eguali; tal'è per esempio il moto di rotazione della terra intorno al suo asse, quello dell' indice di un buon oriuolo, ec. Se poi il

surato la temperatura dell' aria con termometri a serbatoio nudo, i quali insieme al calore di contatto hanno assorbito anche quello irradiato dai corpi ambienti. Che se in conseguenza delle scoverte dell' illustre Melloni si fossero seguite per la misura del calore atmosferico le norme che somministra la teoria del calore raggiante, si sarebbe allora veduta chiaramente la necessità di dover tenere più esatto conto dell' elemento igrometrico. E se egli è vero che gl' igrometri per assorbimento, che soli venivano adoperati al tempo di Laplace, rendevano difficile il calcolo della quantità di vapore per mezzo del grado di umidità, non è lo stesso di quelli che agiscono per condensamento, e che a giorni nostri han fatto per così dire rivivere le ricerche igrometriche. Perciò ho creduto che fosse tempo di porre nella sua giusta veduta questo essenziale elemento della formola barometrica ; e quantunque fin dal 1843 il sig. Apjohn ne avesse fatto rilevare l' importanza, purtuttavia il modo, con cui egli ha cercato di averne conto, non sembra abbastanza soddisfacente (Ved. tom. XIII pag. 253 degli Annali di Fisica e Chimica di Majocchi).

mobile in una successione di tempi eguali avrà percorso spazî diseguali, il suo moto sarà vario; ed in ispecie si dirà *accelerato* o *ritardato*, secondochè gli spazî corrispondenti alla successione dei tempi eguali formeranno una serie crescente e decrescente.

147. Nella comparazione di uno spazio al tempo impiegato in percorrerlo sorge l'idea di velocità, come quella di un rapporto tra due numeri astratti. Nel moto uniforme, pel quale se lo spazio è a pel tempo t, dovrà essere na pel tempo nt, la velocità come quoziente di $\frac{a}{t}=\frac{na}{nt}$, risulta costante e definisce la quantità di spazio percorso nell'unità di tempo. Dimodochè dicendo s lo spazio, t il tempo e v la velocità, avremo l'equazione fondamentale del moto uniforme

$$s=vt.$$

Donde poi derivano le due seguenti

$$t=\frac{s}{v}, \quad v=\frac{s}{t},$$

le quali servono alla determinazione del tempo essendo dati lo spazio e la velocità, o alla determinazione di questa, quando siano dati lo spazio ed il tempo.

Applicando la relazione $s=vt$ al caso di due moti uniformi, compiuti in tempi eguali, e chiamando s ed s' gli spazî percorsi, v e v' le corrispondenti velocità, avremo la proporzione

$$s:s'=v:v';$$

e se con eguali velocità i due moti avessero durato pei tempi t e t', avremmo avuto la proporzione

$$s:s'=t:t'.$$

Vale a dire per due moti uniformi, compiuti in tempi egua-

li, gli spazii percorsi avranno seguito la ragione delle corrispondenti velocità; e se i due moti con eguali velocità abbiano durato per tempi differenti, gli spazii saranno stati proporzionali ai tempi.

E ponendo in fine che due spazii eguali siano percorsi in tempi diseguali, e perciò con velocità diverse, avremo le due equazioni

$$s = vt \ , \ s = v't' \ ;$$

donde

$$vt = v't' \ , \ \text{e} \ v : v' = t' : t \ ;$$

vale a dire che le velocità saranno inversamente proporzionali ai tempi.

148. Nel moto vario la velocità è funzione del tempo; e se v ne rappresenta il valore nella fine del tempo t, essa varierà di dv nell'infinitesimo tempo dt che segue immediatamente al primo. E poichè questa variazione deve stimarsi nulla rispetto al valore finito v, così potremo riguardare come uniforme il moto con cui è percorso lo spazio ds nel tempo dt, ed avremo

$$v = \frac{ds}{dt} \ .$$

La stessa definizione algoritmica può ancora convenire alla velocità costante di un moto uniforme, poichè non dipendendo essa dai valori assoluti dello spazio e del tempo, ma dal semplice rapporto delle corrispondenti espressioni numeriche, avremo

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{\infty} : \frac{t}{\infty} = \frac{ds}{dt} \ .$$

Quindi potremo dire in generale che in ogni sorta di movimento la velocità sia definita dal rapporto dell'elemento ds dello spazio all'elemento dt del tempo in cui è descritto, e che il moto sarà uniforme o vario, secondochè $\frac{ds}{dt}$ sarà costante o dipendente dal tempo.

149. A rigore parlando, e come già accennavamo nel n° 6, non vi ha forze veramente impulsive, vale a dire forze che in un tempo indivisibile possano produrre in un corpo una velocità finita. Purtuttavia è tale l' importanza di questo concetto nello studio della Meccanica razionale, che senza di esso sarebbe impossibile tradurre in algoritmo l' azione delle forze continue; dapoichè l' idea di una continuità varia non è altrimenti associabile a quella di numero, se non riguardando il continuo come l'aggregato di elementi infinitesimi consimili. Così l' azione di una forza continua si trasforma nel nostro pensiero in una serie equivalente d' impulsi immediatamente successivi; e mercè questo concetto potremo dalla misura delle forze impulsive dedurre a guisa di corollario quella che dovrà servire alle forze continue.

Or la Statica, non considerando le forze che nell' istante indivisibile della loro simultanea azione sopra un punto o sopra un sistema di punti, ha potuto stabilire la loro misura sull' immediata comparazione delle loro energie, rappresentandole coi numeri $1, 2, 3,\ldots n$, secondochè possono far direttamente equilibrio ad $1, 2, 3,\ldots n$ forze eguali all' unità di forza. Ma la Dinamica, che non prende a considerare le forze se non in quanto sono cagioni di moto, e che nelle sue ricerche deve continuamente procedere or dalla determinazione della velocità prodotta alla misura della sua cagione ed or dalla nota intensità di questa all'argomento di quella, ha dovuto necessariamente stabilire la comparazione delle forze su quella dei loro effetti.

L' effetto di una forza sta nell' imprimere una certa velocità al corpo, su cui agisce; avrà dunque la forza una certa ragione colla velocità prodotta, come l' effetto deve averne colla sua cagione. Questa dipendenza fu riguardata come una necessaria ragion semplice diretta, finchè l' idea di forza restò confusa con quella di moto; ma quando la riflessione n' ebbe fatto rilevare i caratteri distintivi, si vide che la ragion semplice diretta tra la forza e la velocità prodot-

ta non era conseguenza di verun principio evidente. Allora fu d'uopo appellarne all'osservazione, i cui risultamenti ridotti a formola generale sono compresi nel seguente enunciato: *se una forza sia impressa ad uno dei punti di un sistema, mentre tutti si muovono secondo rette parallele e con velocità eguali e costanti, il moto relativo prodotto in quel punto dalla forza impressa, sarà identico a quello che si sarebbe ottenuto nella quiete del sistema* — Poniamo che la forza venga impressa nella linea del moto comune; $f(v)$ ne sarà il valore, v indicando la velocità da essa ingenerata. Similmente indicando un v_1 la velocità comune a tutti i punti del sistema, la forza che il punto aveva prima della nuova impulsione, dovrà essere espressa da $f(v_1)$; quindi pel principio fondamentale della composizione delle forze il punto, dopo l'impulso ricevuto, avrà la forza $f(v) \pm f(v_1)$, secondochè sarà stato spinto in direzione cospirante ovvero opposta alla retta che percorreva. E poichè pel principio dato dall'osservazione la velocità relativa del punto deve pareggiare il valore v che avrebbe avuto nell'ipotesi della quiete del sistema, sarà $v \pm v_1$ la sua velocità assoluta, e $f(v \pm v_1)$ la forza corrispondente. Avremo così l'equazione

$$f(v \pm v_1) = f(v) \pm f(v_1),$$

la quale, non potendo esser soddisfatta a meno che la funzione f non si riduca ad un fattore costante della velocità, ci dimostra che il principio della ragion semplice diretta è un corollario immediato del principio dedotto dall'osservazione.

150. Abbiamo osservato nel n° 12 come dall'equazione fondamentale della Statica

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

derivi necessariamente la legge del parallelogrammo delle forze. Or sostituendo ad R, P_1, P_2, P_3, ec. i valori equivalenti nV, nv_1, nv_2, nv_3 ec. (V indicando la velocità prodot-

ta dalla risultante, e v_1, v_2, v_3,... quelle dovute alle componenti) avremo per comporre le velocità la relazione

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots ,$$

donde sarà poi facile dedurre l'esistenza di un parallelogrammo delle velocità, analogo a quello delle forze. Perciò un punto che nel tempo stesso sia spinto con velocità rappresentate in grandezza e direzione dalle rette AB, AD *(fig. 1)*, realmente si moverà secondo la diagonale AC del parallelogrammo ABCD, e percorrerà questa linea nel tempo stesso in cui avrebbe percorso sia la linea AB, sia la AD. In conseguenza chiamando v_1 e v_2 le velocità componenti, e θ l'angolo di loro inclinazione, avremo la velocità risultante

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta.}$$

Ed in generale tutti i teoremi relativi alla composizione e decomposizione delle forze sono immediatamente applicabili alle analoghe operazioni sulle velocità.

151. Un altro elemento fa d'uopo introdurre nell'espressione di una forza, ed è la massa del mobile. Le osservazioni più ovvie ci dimostrano che un corpo perdura nella sua quiete finchè l'azione di una forza non venga a metterlo in moto: e se poi vediamo che il moto prodotto continuamente si rallenta fino a cessar del tutto, ciò dipende dalle perdite che la forza motrice ha dovuto soffrire nel vincere le resistenze opposte alla sua azione. Ed in vero, se la cessazione del moto è un dato di osservazione, è un fatto ancora che la durata del moto si aumenta come gli ostacoli divengono meno resistenti, dimodochè il moto sarebbe perpetuo, se le resistenze potessero divenir nulle. Vi ha dunque nella materia una tendenza a perdurare nella condizione di moto o di riposo, in cui una volta si è messa. Questa tendenza è *l' inerzia.*

Dall' idea d' inerzia derivano a modo di corollarii i seguenti teoremi.

I.

L'azione di una forza non può produrre che moto rettilineo.

Perchè ciò non avvenga, o si dovrà toglier di mezzo l' idea d' inerzia, ponendo nei corpi speciali tendenze a talune direzioni di moto piuttosto che ad altre; ovvero tra gl' infiniti modi di divergenza dal cammino rettilineo, che tutti si presentano al pensiero come egualmente possibili, bisognerebbe presceglierne un solo, e porre così l' esistenza di un effetto senza causa; ciò ch' è assurdo.

E per la stessa ragione il moto prodotto da una sola forza, sarà non solo rettilineo, ma diverrà eziandio uniforme, quando la trasfusione della forza nel corpo sarà compiuta.

II.

L' intensità di una forza impulsiva sarà data dal prodotto della massa per la velocità.

Sappiamo che le forze seguono la ragion diretta delle velocità prodotte; ma perchè questa proporzionalità resti attuata, l' idea d' inerzia esige che la massa sia costante. Dapoichè se gli atomi della materia son tutti egualmente inerti, e sia necessaria la forza f per ottenere la velocità v nell' unità di massa, una massa n volte maggiore richiederà la forza nf per acquistare la stessa velocità v. Laonde se diciamo k il fattore che dovrà stabilire la proporzionalità della forza alla velocità ed m la massa del corpo, la forza che in esso produrrà la velocità v, sarà data dall' equazione

$$f = kmv.$$

E poichè nella comparazione dei valori delle forze il fatto-

re k sparisce, si ritiene il prodotto mv come espressione del valore della forza che ingenera la velocità v nella massa m, quantunque rigorosamente non sia altro che un numero proporzionale a quel valore.

L'equazione $f = kmv$ dà luogo alle stesse relazioni che abbiamo ottenuto dall'altra $s = vt$, e che ci limitiamo a soltanto enunciare.

1ª — *Se due forze agiscano sopra masse eguali. le loro energie saranno proporzionali alle velocità prodotte.*

2ª — *Se due forze producano velocità eguali in masse diverse, esse saranno in ragion diretta delle masse:*

3ª — *Se forze eguali agiscano sopra masse differenti, le velocità prodotte saranno in ragion inversa delle masse.*

152. Tutto ciò suppone che la forza interamente trasfusa nel corpo non gli comunichi ulteriori impulsi. Ma sovente accade di dover comparare delle forze che hanno una continuità indefinita; ed allora è necessario aver riguardo al tempo decorso dall'istante in cui è cominciata la loro azione. Poniamo, a modo di esempio, che una forza continua, comunicante ad un corpo la velocità di un pollice per ogni elemento indivisibile di tempo, agisca per **100** di questi elementi; è chiaro che nel finire di questo tempo il corpo possederà la velocità di **100** pollici. E se viceversa per **20** elementi di tempo avesse agito un'altra forza continua capace di comunicare in ogn'impulso la velocità di **2** pollici, allora il corpo avrebbe acquistato la velocità di **40** pollici. Or se le due forze fossero comparate senza tener conto della loro diversa durata di azione, stimeremmo la seconda minore della prima, mentre realmente ne sarebbe doppia. Ma se al contrario la comparazione di due forze continue sia istituita sull'eguaglianza della loro durata di azione, allora essendo eguali i numeri di elementi indivisibili nelle due durate, eguali saranno le quantità d'impulsi consecutivi comunicati dalle due forze; e riguardando quest'impulsi come costanti, i loro rispettivi valori, che rappresenteranno

quelli delle forze donde provvengono, saranno in ragion diretta delle loro somme, e quindi delle velocità prodotte. Così se due forze continue, agendo per uno stesso tempo t sopra due masse eguali, producano le due velocità v e v', le loro intensità saranno nella ragione di v a v'.

Or l'eguaglianza delle durate di azione non è necessario che sia data, poichè dalle velocità prodotte dopo un certo tempo è facile dedurre quella che sarebbe risultata dopo l'unità di tempo, purchè siano eguali gl' impulsi elementari, vale a dire che si supponga costante la forza continua. Imperocchè essendo in tale ipotesi le velocità acquistate proporzionali ai tempi, se la forza f avrà prodotto la velocità v durante il tempo t, essa avrebbe ingenerato la velocità $\frac{v}{t}$ dopo l'unità di tempo; e durante la stessa unità si sarebbe ottenuta la velocità $\frac{v'}{t'}$ dalla forza f' che avesse prodotto la velocità v' nella durata t'. Quindi avremo

$$f : f' = \frac{v}{t} : \frac{v'}{t'} ;$$

vale a dire che: *una forza continua costante è proporzionale al quoziente della velocità prodotta divisa per la durata dell'azione* — E poichè il fattore della proporzionalità si perde nella comparazione delle forze, così potremo dire più brevemente che: *ogni forza continua costante sia da valutarsi mercè il quoziente della velocità pel tempo.*

Ma se gl' impulsi successivi, in cui s' immagina decomposta la continuità dell' azione, fossero diseguali tra loro, qual' è realmente il caso di tutte le forze continue conosciute, allora dovendone riguardar costante l' azione durante l' elemento di tempo, in cui la velocità v patisce l' infinitesima variazione dv, avremo

$$f = \frac{dv}{dt} .$$

La quale definizione conviene anche alle forze continue costanti, poichè

$$v : t = \frac{v}{\infty} : \frac{t}{\infty} = \frac{dv}{dt}.$$

153. Tutto ciò che finora abbiamo detto sulle forze continue, suppone che le loro azioni si svolgano sopra masse eguali: ma se queste fossero differenti, bisognerebbe tenerne conto conformemente alla legge d'inerzia. Perciò se dinotiamo con $\frac{dv}{dt}$ la forza che produce la velocità v dopo il tempo t nell'unità di massa, quella che nello stesso tempo produrrà la medesima velocità nella massa m, dovrà essere espressa da $m\frac{dv}{dt}$. La prima espressione, come quella che disegna l'energia della forza in quanto che dipende dalla sua natura, si ritiene come valore della *forza acceleratrice;* l'altra poi che dinota quanta forza si richiederebbe per fare equilibrio al corpo di massa m che ne fosse animato, si ha come valore della *forza motrice*. Così la forza acceleratrice della gravità è la stessa per ogni aggregato materiale, ma quella che sarà necessaria a farle equilibrio, risulterà varia come la massa del grave.

CAPO SECONDO.

Del moto assoluto di un punto materiale perfettamente libero ed animato da una sola forza.

Obbietto di questa teorica — Equazione del moto di un punto sottoposto all' azione di una forza acceleratrice costante. Applicazione alla caduta dei gravi nel vôto — Ipotesi di una celerità impressa secondo la linea della forza continua. Gravi proietti verticalmente nel vôto — Moto nei mezzi resistenti prodotto da forza continua. Moto verticale dei gravi in seno dell' atmosfera. Metodo sperimentale per determinare il coefficiente della resistenza che v' incontrano — Ipotesi di una forza acceleratrice, funzione della distanza del mobile da un dato punto. Applicazione al moto verticale dei gravi, tenendo conto della diminuzione della gravità. Valore della forza impulsiva che renderebbe impossibile il ritorno del grave verso il centro attraente — Moto di un corpo sottoposto all' attrazione di due centri.

154. Due moti, l' uno di rotazione e l' altro di traslazione, possono coesistere in un medesimo corpo; ma in un punto materiale non possiamo immaginare altro moto che il secondo. Perciò se questo moto esista solo, o solo si consideri in un corpo, questo si moverà non altrimenti che un punto. Donde poi segue che la teorica del moto di un punto non è che quella del moto di traslazione; ed essa nella Meccanica razionale fa lo stesso ufficio, cui adempiono le teoriche delle linee e delle superficie nella Geometria dei solidi; vale a dire che essa prepara gli elementi di cui la sintesi intellettuale dovrà servirsi per la composizione della scienza.

155. Cominciando dal caso più semplice, facciamoci a considerare il moto di un punto in quanto può esser prodotto dall' azione di una sola forza. Supponendola continua, e chiamando s lo spazio descritto nel tempo t, durante il quale sarà prodotta la velocità v, avremo (n° 152) la forza

$$(1) \qquad \varphi = \frac{dv}{dt} = d\frac{ds}{dt} : dt = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Questa semplicissima equazione in se racchiude tutta la teorica del moto di traslazione generato dall' azione di una sola forza. Imperocchè supponendo il moto prodotto da forza impulsiva, la velocità sarà costante, ed avremo

$$\frac{ds}{dt} = a \text{ , donde } s = at + b.$$

La costante a indica la velocità del mobile, e l' altra b rappresenta lo spazio che il mobile potrà aver descritto prima che sia cominciato il tempo t. Ma se questo avesse confuso la sua origine con quella del moto, sarebbe $b = o$; e sì nell' uno che nell' altro caso si avrà lo spazio $s - b$ proporzionale al tempo t, vale a dire che si avrà moto uniforme, il solo che poteva esser prodotto da forza impulsiva.

Considerando poi la forza nella continuità della sua azione, questa potrà essere costante o varia. Nel primo caso l' equazione (1) ci darà successivamente

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} = \varphi t + c,$$

$$(3) \qquad s = \tfrac{1}{2}\varphi t^2 + ct + c'.$$

La costante c' disegna lo spazio che il mobile avrà potuto descrivere prima che sia cominciato il tempo t; e la costante c indica la velocità che il mobile poteva avere nell' istante in cui è cominciata l' azione della forza φ. Dimodochè lo spazio descritto nel tempo t sarà equivalente alla somma di due spazii, l' uno $\frac{1}{2}\varphi t^2$ per effetto dell' azione continua di φ, l' altro ct in conseguenza della velocità c. Ma se il mobile non abbia avuto altra velocità, fuorchè quella prodotta dall' azione di φ, ed il tempo siasi cominciato a misurare dall' origine del moto, allora saranno nulle c e c', e l' equazioni (2) e (3) ci daranno

$$\frac{ds}{dt} = \varphi t \text{ , ed } s = \tfrac{1}{2}\varphi t^2 ;$$

vale a dire che nel moto unicamente prodotto da forza ac-

celeratrice costante, la velocità $v = \frac{ds}{dt}$ aumenta in ragione del tempo, e lo spazio in ragione del quadrato di esso tempo. Così la gravità, che la Fisica insegna potersi riguardare come forza costante nelle altezze dal suolo che siano piccolissime frazioni del raggio terrestre, farà scendere i corpi nel vôto accrescendo la loro velocità in ragione del tempo, e facendo ad essi descrivere degli spazii proporzionali ai quadrati dei tempi.

Eliminando t dalle due ultime equazioni si ottiene

$$v = \sqrt{2\varphi s}\ ;$$

la quale applicata alla discesa verticale dei gravi nel vôto, fa conoscere la velocità che il grave acquisterebbe cadendo dall' altezza s. E questa relazione tra v ed s, che permette esprimere il valore di una forza impulsiva mercè l' altezza donde un grave dovrebbe cadere nel vôto per acquistare l'equivalente velocità, talvolta agevola il lavoro del calcolo nella soluzione dei problemi meccanici.

Da ultimo osserviamo che facendo $t = 1$ nell' equazione $s = \frac{1}{2}\varphi t^2$, abbiamo l' altra

$$\varphi = 2s,$$

la quale restando tuttavia conforme ai principii esposti nel n° 152, offre un mezzo facile per la determinazione numerica di una forza acceleratrice costante. Ed è così che la Fisica definisce il valore della gravità terrestre.

156. Nell' ipotesi di una velocità aggiunta all' azione acceleratrice abbiamo supposto che le due azioni erano cospiranti; ma potrebbero essere opposte, ed in tal caso φ e c essendo di contrario segno, le equazioni (2) e (3) diverranno, prescindendo dallo spazio che potrebbe essere stato descritto prima del tempo t,

$$v = \varphi t - c\ ,\ s = \tfrac{1}{2}\varphi t^2 - ct.$$

La prima delle quali ci dimostra che la velocità sarà nega-

tiva e decrescente, finchè sarà $\varphi t < c$; sarà nulla, e perciò il corpo rimarrà per un istante in riposo, quando sarà $\varphi t = c$; ed in fine positiva e crescente dall'istante in cui si avrà $\varphi t > c$. Or dall'equazione $\varphi t = c$ si ottiene $t = \frac{c}{\varphi}$, che sarà la durata del moto nel senso della velocità impressa c. Chiamando θ questo tempo, potremo esprimere ogni durata dall'origine del moto con $t = \theta \pm \alpha$; e sostituendo questa espressione nella funzione che assegna il valore di v, avremo

$$v = \pm \varphi \alpha.$$

Vale a dire che in tempi equidistanti da $t = \theta$ le due velocità saranno eguali e di segno contrario; ed esse aumenteranno o diminuiranno proporzionatamente al tempo, secondochè α sarà positivo o negativo.

Sostituendo poi θ a t, e $\varphi\theta$ a c nella seconda equazione, avremo che lo spazio descritto dal mobile nel senso della velocità comunicata sarà espresso da

$$s = -\tfrac{1}{2}\varphi t^2,$$

vale a dire che lo spazio sarà eguale ed inverso a quello che nello stesso tempo θ il mobile avrebbe percorso sotto l'azione della sola forza φ.

Applicando queste formole al moto dei gravi spinti verticalmente in alto, si ottiene — 1° Che il moto ascendente del grave nel vôto sarà ritardato secondo la stessa legge, che ne regolerebbe l'accelerazione nella sua caduta — 2° Che la durata della discesa di un grave dall'altezza s essendo data dall'equazione

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}},$$

e quella della salita verticale in virtù della velocità impressa c avendosi dall'equazione

$$t = \frac{c}{g},$$

ne segue che supponendo uno stesso valore di t, avremo

$$2gs = c^2 ;$$

vale a dire che un grave spinto verticalmente in alto salirà all' altezza s, donde farebbe mestieri lasciarlo cadere, perchè acquistasse una velorità eguale a quella che gli è stata impressa. Perciò se immaginiamo che ad un punto qualunque della verticale, che un grave percorre nella sua caduta, la velocità acquistata si trovasse diretta in senso opposto, il grave salirebbe all' altezza donde è disceso.

157. Finora abbiamo supposto che il moto si attuasse in uno spazio vôto; poniamo in vece che abbia luogo in un mezzo resistente. In questa ipotesi l'azione della forza incontrerà un ostacolo al suo pieno svolgimento, e ciascuno dei suoi impulsi elementari si troverà diminuito di ciò che sarà consumato nel vincere la resistenza del mezzo. Questa perdita sarà dipendente sì dalla densità di esso mezzo, che dal volume, dalla figura, densità e celerità del mobile. Imperocchè un volume più grande dovrà smuovere una maggior quantità di fluido ambiente, ed incontrare in conseguenza una resistenza maggiore, la quale divisa pel numero delle molecole urtanti, che poniamo costante, farà toccare ad ognuna di esse una perdita maggiore: così vediamo divenir più lenta la caduta dei gravi in seno dell' atmosfera, a misura che sotto lo stesso volume contengono una minor quantità di materia. Ed a parità di volume, una figura che presentasse alla resistenza del mezzo più ampia superficie, occasionerebbe una perdita maggiore. Dietro le quali osservazioni sarebbe ozioso ogni schiarimento sull' influenza della densità del mezzo. Ma se questo sia fisicamente omogeneo, ed il mobile nell' attraversarlo non patisca considerevoli cangiamenti di temperatura, tutte le mentovate cagioni (eccetto quella dovuta alla diversa celerità) saranno altrettante costanti, e si potrà calcolare la funzione, da cui dipenderà il valore della loro simultanea influenza. Poniamo a modo di esempio che

il mobile abbia forma sferica di raggio r, e che D ne sia la densità: la sua massa sarà

$$m = \frac{4}{3}\pi D r^3 .$$

Chiamando d' altronde R la resistenza dovuta alle cagioni costanti e che il mobile incontrerà in un istante qualunque del tempo, la frazione che ne toccherà all' unità di massa sarà espressa da

$$\frac{R}{m} = \frac{3R}{4\pi D r^3} .$$

E poichè R dipende ancora dalla densità ρ del mezzo e dalla superficie $4\pi r^2$ del mobile, potremo stabilire

$$R = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho r^2,$$

γ disegnando un fattore che sarà dato dall'esperienza. Avremo così

$$\frac{R}{m} = \frac{\gamma\rho}{Dr} .$$

Ecco nell' ipotesi di un corpo sferico la funzione delle quatità costanti da cui dipenderà la resistenza al moto opposta da un mezzo di densità uniforme. Ma oltre alle mentovate quantità e che sono costanti, avvi una variabile, qual' è la velocità del corpo, che prende una parte considerevole nel valore della resistenza; dapoichè le più ovvie osservazioni ci dimostrano che la resistenza incontrata dai corpi che si muovono in un mezzo, cresce secondo una certa funzione della loro velocità. Questa funzione non potendo essere altrimenti conosciuta che mediante una divinazione per via d' ipotesi, Newton suppose che consistesse in una proporzionalità al quadrato della velocità, partendo dal principio che la perdita di forza patita dal mobile debba seguire la ragion composta della velocità con cui urta le molecole del mezzo, e del numero che

ne incontra in un dato tempo ; ciò che evidentemente si riduce al quadrato della velocità moltiplicato per un fattore costante. In conseguenza chiamando v la velocità del corpo e k un fattore costante , esprimeremo con kv^2 la parte che essa prende nel valore della resistenza : sarà quindi

$$\frac{R}{m} f(v) = \frac{3pkv^2}{Dr}.$$

Se in vece della resistenza del mezzo immaginiamo una equivalente forza continua, opposta a quella che anima l'unità di massa del mobile, le condizioni del problema rimarranno inalterate, mentre l'equazione (1) ce ne darà immediatamente la traduzione algoritmica. Perciò chiamando φ la forza acceleratrice del mobile , e ponendo $\frac{R}{m} f(v) = \varphi n^2 v^2$, avremo che il corpo sarà animato dalla forza acceleratrice

$$\varphi(1-n^2 v^2) = \frac{dv}{dt} ;$$

donde

$$t = \frac{1}{\varphi} \int \frac{dv}{1-n^2 v^2} .$$

Il quale integrale , trattato col noto metodo della risoluzione del denominatore in fattori del 1° grado , darà

$$t = \frac{1}{2\varphi n} \log^{e} \frac{1+nv}{1-nv} ,$$

ponendo che l'origine del tempo sia identica a quella del moto. E risolvendo l'ultima equazione rispetto a v si ottiene

$$(4) \qquad v = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2\varphi nt} - 1}{e^{2\varphi nt} + 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\varphi nt} - e^{-\varphi nt}}{e^{\varphi nt} + e^{-\varphi nt}} ;$$

nella quale espressione ponendo φnt eguale ad un numero

grandissimo, sarà prossimamente $e^{-\varphi n t}=0$, e perciò $v=\frac{1}{n}$. Tende dunque il moto a divenir uniforme, ed a questo limite perverrà tanto più presto, per quanto n sarà più grande. È questo il caso dei gravi, che, scendendo nell'atmosfera, presentano alla resistenza del mezzo una superficie assai grande in comparazione della loro massa.

Sostituendo l'ottenuto valore di v nell'equazione $v=\frac{ds}{dt}$, avremo

$$s=\frac{1}{n}\int\frac{e^{\varphi nt}-e^{-\varphi nt}}{e^{\varphi nt}+e^{-\varphi nt}}\,dt=\frac{1}{n^2\varphi}\,{}^{e}\!\log\left(e^{\varphi nt}+e^{-\varphi nt}\right)+C\;;$$

e ponendo che s e t siano nulli ad un tempo, sarà

$C=-\frac{1}{\varphi n^2}\,{}^{e}\!\log 2$; quindi

$$s=\frac{1}{\varphi n^2}\,{}^{e}\!\log\frac{e^{\varphi nt}+e^{-\varphi nt}}{2}. \tag{5}$$

158. Se il corpo mercè velocità impressa seguisse direzione opposta all'azione acceleratrice, allora questa cospirerebbe colla resistenza del mezzo, ed avremmo

$$\varphi(1+n^2v^2)=\frac{dv}{dt},$$

donde

$$t=\frac{1}{\varphi}\int\frac{dv}{1+n^2v^2}=\frac{1}{n\varphi}\,\text{arcotang}\,nv+C.$$

La costante C sarà determinata ponendo $t=0$, e $v=-c$, valore della velocità impressa; ciò che darà

$$t=\frac{1}{n\varphi}(\text{arcotang}\,nv+\text{arcotang}\,nc)=\frac{1}{n\varphi}\,\text{arcotang}\frac{n(v+c)}{1-n^2vc}\;;$$

donde

$$v=\frac{1}{n}\cdot\frac{\text{tang}\,\varphi nt-nc}{1+nc\,\text{tang}\,\varphi nt}=\frac{\text{sen}\,\varphi nt-nc\cos\varphi nt}{\cos\varphi nt+nc\,\text{sen}\,\varphi nt}. \tag{6}$$

E la durata del moto nel senso della velocità impressa sarà data dal valore di t che renderà $v=0$, ossia da

$$\tang\varphi nt - nc = 0 ,$$

che ci dà

$$t = \frac{1}{\varphi n} \operatorname{arcotang} nc. \tag{7}$$

Sostituendo poi nell' equazione $v=\frac{ds}{dt}$ il valore di v dato dall' equazione (6) avremo, nell' ipotesi che $t=0$ dia $s=0$,

$$s = \frac{1}{n}\int \frac{\operatorname{sen}\varphi nt - nc\cos\varphi nt}{\cos\varphi nt + nc\operatorname{sen}\varphi nt}\, dt = -\frac{1}{n^2\varphi} \overset{e}{\log}(\cos\varphi nt + nc\operatorname{sen}\varphi nt);$$

e se in quest' ultima espressione poniamo il valore di t dato dall' equazione (7), avremo lo spazio

$$s' = -\frac{1}{2n^2\varphi} \overset{e}{\log}(1+n^2c^2) \tag{8}$$

che sarà percorso dal mobile nel senso della velocità impressa. La quale, continuamente diminuita dall' opposta azione della forza acceleratrice, toccherà il limite zero nel medesimo istante in cui sarà compiuto lo spazio s'; ed allora il mobile tornerà sulla via già percorsa, passando una seconda volta pel punto preso come origine. E potremo calcolare il tempo, che impiegherà nel ritorno, sostituendo ad s nell' equazione (5) il valore di s' col segno mutato; ciò che ci darà

$$e^{\varphi nt} + e^{-\varphi nt} = 2\sqrt{1+n^2c^2}.$$

Facciamo $e^{\varphi nt} = z$, avremo

$$z^2 - 2z\sqrt{1+n^2c^2} + 1 = 0;$$

donde

$$z = nc + \sqrt{1+n^2c^2} = e^{\varphi nt}$$

e

$$(9) \qquad t = \frac{1}{\varphi n} \overset{e}{\log}\left(nc + \sqrt{1+n^2c^2}\right).$$

Questo valore di t sostituito nell' equazione (6) ci darebbe la velocità con cui il mobile torna all' origine dello spazio. Ma possiamo avere una formola più semplice ponendo nell' equazione $\varphi = \frac{dv}{dt}$ il valore di dt tratto da $v = \frac{ds}{dt}$; ciò che darà $\varphi ds = v dv$. E poichè nel ritorno del corpo al punto di origine la forza acceleratrice è $\varphi(1-n^2v^2)$, così avremo

$$s = \int \frac{v dv}{1-n^2v^2} = \frac{1}{2n^2\varphi} \overset{e}{\log} \frac{1}{1-n^2v^2},$$

dovendo esser nulli ad un tempo v ed s. Or facendo astrazione dal segno del 2° membro dell' equazione (8) perchè si tratta di valore assoluto, e poi comparandolo al 2° membro dell' ultima equazione, avremo

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+n^2c^2}}.$$

Dunque il mobile ritornerà al punto di origine con velocità minore di quella con cui ne partiva, ed impiegando un tempo maggiore di quello durato nella salita. Imperocchè le equazioni (7) e (9) dandoci per differenza dei due tempi l' espressione

$$\frac{1}{\varphi n}\left[\overset{e}{\log}\left(nc + \sqrt{1+n^2c^2}\right) - \text{arcotang}\, nc\right],$$

poniamo

$$y = \overset{e}{\log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \text{arcotang}\, x;$$

avremo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right).$$

Sarà dunque $\frac{dy}{dx}$ sempre positiva, ed y sarà funzione crescente. E poichè l'ipotesi di $x=0$ rende $y=0$, avremo che da $x=0$ ad $x=\infty$, la funzione y sarà costantemente positiva, ed in conseguenza si avrà sempre

$$\overset{e}{\log}(nc+\sqrt{1+n^2c^2})>\text{arcotang}\, nc.$$

Intanto addizionando i due tempi, e chiamandone θ la somma, abbiamo

$$\theta=\frac{1}{n\varphi}\left[\text{arcotang} nc+\overset{e}{\log}(nc+\sqrt{1+n^2c^2})\right];$$

espressione che offre il mezzo di determinare n, quando siano dati i valori di θ e c. Consideriamo a modo di esempio una palla lanciata da un cannone in linea verticale. Non ostante l'enorme velocità del moto si potrà determinare con sufficiente esattezza il tempo che andrà decorrendo tra l'istante dell'esplosione e quello del ritorno della palla al luogo della partenza; quindi se sarà conosciuta la velocità iniziale della palla, si avrà tutto ciò che sarà necessario alla determinazione di n. E poichè questo coefficiente rappresenta $\sqrt{\frac{2\rho k}{Dr}}$; è chiaro che conosciutone il valore n per una palla di raggio r; quello che avrà luogo per un'altra palla della medesima sostanza e di raggio r', sarà dato dall'equazione

$$n'=n\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Tutte le formole esposte in questi due ultimi numeri sono applicabili, tra certi limiti, al moto dei gravi o che scendano in seno dell'atmosfera o che vi siano proietti verticalmente in alto. Soltanto osserviamo che quantunque esse prendano la forma indeterminata di $\frac{0}{0}$ ponendovi $n=0$, vale a

dire immaginando il moto attuato nel vôto ; purtuttavia cercandone i veri valori col noto metodo della differenziazione, esse prenderanno le forme convenienti all' ipotesi stabilita.

159. Finora abbiamo supposto una forza acceleratrice costante : passiamo ora a considerarla come variabile secondo una certa funzione della distanza del mobile da un punto fisso. Sulla quale funzione faremo due ipotesi : nell' una stabiliremo la ragione inversa dei quadrati delle distanze , e nell' altra la loro semplice ragion diretta ; attesocchè di queste due ipotesi la prima si trova attuata nelle forze che reggono il sistema planetario, e la seconda avrebbe luogo nella discesa dei gravi per lo interno di un pianeta di densità uniforme.

Essendo la gravità planetaria inversamente proporzionale ai quadrati delle distanze dai centri dei pianeti, segue che chiamando g il valore di questa forza alla superficie di un pianeta di raggio r , essa sarà espressa da $\frac{gr^2}{a^2}$ alla distanza a dal centro. In conseguenza il grave che movendo da tale distanza, ne abbia percorso la parte x nel tempo t, al termine di questa durata avrà la forza acceleratrice $\frac{gr^2}{(a-x)^2}$; e la legge del suo moto sarà espressa dall' equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

La quale moltiplicata nei due membri per $2dx$, diviene

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2} = \frac{2gr^2dx}{(a-x)^2};$$

donde

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2gr^2\int\frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{2gr^2}{a-x} + \mathrm{C}.$$

E poichè facendo $x = 0$, dev' esser nulla ancora la velocità $v = \frac{dx}{dt}$, avremo $\mathrm{C} = -\frac{2gr^2}{a}$; quindi

$$(10) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x}.$$

Mercè la quale relazione potremo determinare la velocità del grave in ogni punto della discesa. Per averne poi il tempo corrispondente, risolveremo l'ultima equazione rispetto a t; ciò che ci darà

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} + C.$$

Or

$$\int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \int\frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}dx = \int\frac{\frac{1}{2}a-x}{\sqrt{ax-x^2}}dx + \int\frac{\frac{a}{2}dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$
$$= \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\ \text{arco cos}\ \frac{a-2x}{a} + C;$$

quindi

$$(11) \qquad t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\ \text{arco cos}\frac{a-2x}{a}\right],$$

essendo $C = 0$, poichè t ed x debbono esser nulli ad un tempo.

Se in queste formole supponiamo che ad a ed r siano prossimamente eguali, come avviene in tutti gli sperimenti che si possono istituire sulla caduta dei gravi, allora saranno senza errore sensibile soddisfatte le equazioni

$$\sqrt{ax-x^2} = \sqrt{x(r-x)} = \sqrt{rx},$$

$$\frac{a}{2}\ \text{arco cos}\ \frac{a-2x}{a} = \frac{r}{2}\ \text{arco sen}\ \frac{2\sqrt{rx}}{r} = \sqrt{rx},$$

le quali suppongono $a = r$, ed in conseguenza x trascurabile rispetto ad r. Ed in virtù di esse l'equazione (10) ci darà

$$v^2 = 2gx,$$

e dalla (11) avremo

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Perciò queste determinazioni, che nel n° 155 abbiamo ottenuto dall'ipotesi di una gravità costante, rappresentano la reale discesa dei gravi nel vôto, quando le altezze, come di

ordinario avviene, sono picciolissime rispetto al raggio terrestre.

160. Nella stessa ipotesi di una gravità decrescente in ragione dei quadrati delle distanze dal centro attraente consideriamo il moto di un grave lanciato verticalmente in alto. Prendendo ad origine il centro e la direzione della velocità impressa come positiva, avremo che la gravità $-g$ alla superficie del pianeta, ossia alla distanza r dal centro, diverrà $-\frac{gr^2}{x^2}$ alla distanza x; quindi l'equazione (1) ci darà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gr^2}{x^2},$$

che integrata mercè l'introduzione del fattore $2dx$ diviene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{x} + C.$$

E supponendo che il grave cominci il suo moto di ascensione da un punto della superficie del pianeta, avremo che $\frac{dx}{dt}$ diverrà eguale alla velocità impressa c nell'ipotesi di $x=r$. Avremo così la costante $C = c^2 - 2gr$, ed in conseguenza

$$v^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right) + c^2.$$

Nella quale espressione ponendo $\alpha = x - r$, avremo

$$v = \sqrt{c^2 - 2g\frac{\alpha r}{\alpha + r}};$$

donde si rileva che per un medesimo valore di α la diminuzione della velocità impressa sarà tanto più rapida, per quanto sarà più grande g per un medesimo valore di r, o più grande r con g costante.

L'altezza poi, alla quale il grave potrà elevarsi, sarà data dall'equazione

$$2gr^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right) + c^2 = 0,$$

da cui si avrà

$$x = \frac{2gr^2}{2gr - c^2}.$$

Quindi se fosse $c = \sqrt{2gr}$, il grave non potrebbe ritornare verso il pianeta donde è partito, poichè $v = 0$ richiederebbe $x = \infty$. Un simile risultamento dovrebbe ancor aver luogo ponendo $c > \sqrt{2gr}$; e quantunque in tale ipotesi x prenda un valore finito, purtuttavia il segno — che lo precede, dimostra l'impossibilità di far convergere a zero la serie dei valori di v. Ed invero, ponendo $x = \infty$ nell'equazione che dà il valore di v, avremo

$$v = \sqrt{c^2 - 2gr};$$

vale a dire che nell'ipotesi di $c > \sqrt{2gr}$ il grave anzicchè salire con una velocità continuamente decrescente, tende invece ad assumere la velocità costante $\sqrt{c^2 - 2gr}$ [1].

[1] È noto dalle regole algebriche che quando il valore di una incognita risulta negativo dalla soluzione dell'equazione che la contiene, allora non solo è messa in evidenza l'impossibilità del problema sotto la forma data, ma sostituendo $-x$ ad x nell'equazione primitiva si avrà il mezzo di mutarne l'enunciato in modo da rendere possibile il problema.

Ciò posto, nella quistione trattata nel testo la quantità x, che dev'essere essenzialmente positiva, assume in vece la forma negativa quando si vuol determinarla mercè la condizione di $v = 0$. La velocità dunque non potrà esser giammai nulla. Ma l'impossibilità dichiarata dal segno — essendo semplicemente relativa, cercheremo rettificare l'enunciato del problema sostituendo $-x$ ad x nella prima forma integrale, ed avremo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2gr^2}{x} + C.$$

Or perchè l'integrale prenda questa forma, è d'uopo che l'equazione differenziale sia stata

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{x^2};$$

vale a dire che la possibilità del problema richiede una forza ac-

161. Poniamo ancora che la forza acceleratrice sia direttamente proporzionale alla distanza del mobile da un dato punto. Sarebbe questo il caso di un grave che scendesse per un foro scolpito lungo il diametro di un pianeta omogeneo, avendosi così (n° 118) una forza acceleratrice proporzionale alla distanza del grave dal centro. Chiamando x questa distanza ed r il raggio del pianeta, avremo che il valore $-g$ della forza attraente alla distanza r dal centro, diverrà $-\frac{gx}{r}$ alla distanza x; quindi si avrà

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{gx}{r},$$

e

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2}=-\frac{2gxdx}{r};$$

donde

$$\frac{dx^2}{dt^2}=-\frac{gx^2}{r}+C.$$

E poichè $x=r$ rende $\frac{dx}{dt}=0$, sarà $C=gr$; in conseguenza

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{g(r^2-x^2)}{r}.$$

celeratrice agente secondo le x positive: sarà dunque una ripulsione decrescente in ragione dei quadrati delle x, e che avrà il valore g alla distanza $x=r$. Or se trovandosi il corpo alla distanza $x=r$ dal centro ripulsivo, riceva in senso contrario la velocità c, allora l'integrazione dell'equazione precedente ci darà

$$v^2=2gr^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right)+c^2,$$

da cui risulterà $v=0$ facendo

$$x=\frac{2gr^2}{2gr+c^2}.$$

Quindi il valore negativo, che x assume nell'ipotesi di $c>\sqrt{2gr}$, risolve il problema quando in vece di attrazione si abbia una forza ripulsiva sottoposta alla stessa legge.

Ed essendo t ed x di segno contrario, ne dedurremo

$$t = -\sqrt{\frac{r}{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\text{arcocos}\,\frac{x}{r}\,;$$

alla quale espressione non aggiungiamo costante, perchè $x = r$ rende $arco = 0$ e $t = 0$.

Per determinare il tempo θ che il grave dovrà impiegare per giungere al centro del pianeta, faremo $x = 0$ nell'equazione di t, e così avremo

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,.$$

Allora il grave avrà la velocità $v = \sqrt{gr}$, quella stessa che avrebbe acquistato cadendo dall'altezza $a = \frac{1}{2}r$. In virtù di questa velocità il grave trascorrerà il centro fino all'altra estremità del foro, giacchè sarà d'uopo supporre $x = -r$ per ottenere di belnuovo $v = 0$. Ivi trovandosi il grave nella stessa condizione in cui era al principio del moto, dovrà ricalcare la stessa via, e così dar cominciamento ad un moto di oscillazione che non avrà mai termine.

Osserviamo inoltre che il valore di v restando invariato col sostituire $-x$ ad x, un grave dovrà avere eguali velocità in eguali distanze dal centro. Ed a queste eguali distanze perverrà in epoche egualmente lontane dall'istante in cui passerà pel centro, poichè il tempo

$$-\sqrt{\frac{r}{g}}\int_x^o\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{arcocos}\,\frac{x}{r}\right)$$

che consumerà in percorrere la distanza x che lo separa dal centro, sarà eguale all'altro

$$-\sqrt{\frac{r}{g}}\int_o^{-x'}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\left(\text{arcocos}\,\frac{-x'}{r} - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

che gli bisognerà per allontanarsene della distanza $-x'$, quando siano eguali i valori assoluti di x ed x'.

Tutto ciò d'altronde suppone che il foro scolpito lungo il diametro del pianeta non sia occupato da verun mezzo resistente; chè in contrario le ampiezze delle oscillazioni del grave sarebbero continuamente diminuite fino a ridurlo ad una qnicte finale nel centro di attrazione.

162. Sappiamo (n° 10) che due forze agenti secondo una stessa retta, si compongono in una sola equivalente alla loro somma algebrica. In virtù di questo teorema potremo ridurre ai casi precedenti il moto di un corpo che nella sua posizione iniziale occupasse un punto della congiungente due centri di attrazione, avesse o pur no una celerità impressa secondo le stessa linea. Siano A e B (*fig. 102*) i due centri; e poniamo che le loro attrazioni, decrescenti come i quadrati delle distanze, abbiano i valori φ e ψ nell'unità di distanza dai rispettivi centri. Dopo il tempo t sia x la distanza del mobile dal centro A; e chiamando c l'intervallo dei due centri, $c-x$ sarà la sua distanza da B. Quindi la forza acceleratrice, a cui il mobile sarà sottoposto dopo il tempo t, sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\psi}{(c-x)^2}-\frac{\varphi}{x^2},$$

che integrata dopo avervi introdotto il fattore $2dx$, diverrà

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{2\psi}{c-x}+\frac{2\varphi}{x}+C$$

Se il mobile non aveva velocità impressa nella posizione iniziale $x=a$, determineremo C mediante l'equazione

$$\frac{2\psi}{c-a}+\frac{2\varphi}{a}+C=0,$$

donde

$$C=-\frac{2\psi}{c-a}-\frac{2\varphi}{a},$$

ed in conseguenza

$$\frac{dx^2}{dt^2}=2\psi\left(\frac{1}{c-x}-\frac{1}{c-a}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right).$$

Ma in tal caso è d'uopo osservare che il moto non potrebbe aver cominciamento senza velocità comunicata, se il mobile nell'origine del tempo occupasse quel punto dell'intervallo dei due centri, nel quale le due opposte attrazioni risultano eguali. Questo punto è definito dell'equazione

$$\frac{\psi}{(c-x)^2}=\frac{\varphi}{x^2},$$

da cui si ottengono i due valori

$$x_1=\frac{c\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\psi}+\sqrt{\varphi}}\,,\ \text{ed}\ x_2=-\frac{c\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\psi}-\sqrt{\varphi}}\,;$$

Il primo dei quali definisce un punto situato tra i centri A e B, e che solo conviene all'equilibrio del mobile; il secondo poi determina un punto fuori dei centri, dal lato di A o di B, secondochè ψ è più o meno grande di φ, e nel quale punto divengono eguali le due azioni acceleratrici cospiranti.

Che se poi il corpo nell'origine del tempo avesse avuto la celerità impressa k secondo la linea dei centri, la costante C, determinata dall'equazione

$$\frac{2\psi}{c-a}+\frac{2\varphi}{a}+C=k^2,$$

diverrebbe

$$C=k^2-\frac{2\psi}{c-a}-\frac{2\varphi}{a},$$

e l'equazione del moto sarebbe

$$\frac{dx^2}{dt^2}=k^2+2\psi\left(\frac{1}{c-x}-\frac{1}{c-a}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right).$$

Or supponiamo che i punti A e B siano centri di due sfere omogenee, le cui masse siano m ed m'; sarà $\varphi=m$; $\psi=m'$. Supponiamo inoltre che un grave sia spinto nella direzione AB, partendo dal punto p in cui la congiungente

i due centri incontra la superficie della sfera A; e che si voglia determinare la velocità iniziale k, sufficiente a farlo pervenire in C che supponiamo esser il punto di eguale attrazione. Egli è chiaro che k dovrà avere il valore che risulterà dall'equazione precedente, dopo di avervi messo $\frac{dx}{dt}=0$, $\varphi=m$, $\psi=m'$ ed $x=\frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}}$. Così avremo

$$k^2=\frac{2m}{a}+\frac{2m'}{c-a}-\frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2}{c}.$$

Con una velocità impressa minore di k il grave ricadrebbe sulla sfera A, con una velocità maggiore perverrebbe alla sfera B.

Poniamo per esempio che si voglia determinare quanta dovrebbe essere la forza di proiezione in un vulcano lunare perchè un grave che ne venisse lanciato verso la terra, giungesse al punto di eguale attrazione. Partendo dai dati astronomici che la massa della luna sia $\frac{1}{75}$ di quella della terra; che la media distanza tra i centri dei due pianeti sia di 60 raggi terrestri; e che in fine il raggio del primo sia $\frac{3}{11}$ di quello del secondo che chiamiamo r; avremo

$$a=\frac{3}{11}r., \quad c=60r, \quad m=\frac{1}{75}m';$$

quindi sarà

$$k^2=0,04489\,\frac{2m'}{r}.$$

Or la gravità terrestre rappresentata da m' all'unità di distanza, sarà $\frac{m'}{r^2}$ alla distanza r; e poichè la forza di gravità a livello del mare e sotto la latitudine 45° è rappresentata da $9^m,80896$, avremo

$$\frac{m'}{r^2}=9^m,\ 80896 \text{ e } \frac{2m'}{r}=2r.9,80896.$$

Essendo inoltre la semicirconferenza del meridiano terrestre eguale a 20 milioni di metri, sarà

$$r = \frac{20000000}{x}.$$

E sostituendo questi valori nell' ultima espressione di k^2, avremo

$$k = 2368^m.$$

Dunque un grave lanciato dalla luna verso la terra con velocità alquanto più grande di 2368 metri a minuto secondo, oltrepasserebbe il punto di equale attrazione, e verrebbe a cadere sul nostro pianeta. Quindi si comprende come in un'epoca, nella quale la Meteorologia non aveva dati sufficienti per dover considerare le aeroliti come masse cosmiche speciali, sia sembrata miglior ipotesi quella che ne fissava l' origine nella forza proiettiva dei vulcani lunari.

CAPO TERZO.

Del moto assoluto di un punto perfettamente libero ed animato da qualsivoglia numero di forze.

Equazioni generali del moto di un punto animato da qualsivoglia numero di forze. Loro applicazione alla ricerca della traiettoria di un punto animato da sole forze impulsive — Equazioni di condizione perchè il moto prodotto da più forze acceleratrici risulti rettilineo — Sotto l' azione di simili forze la traiettoria è in generale una linea curva, la cui definizione algoritmica, quando sia possibile, richiederà la determinazione di sei costanti arbitrarie — Definizione del deviamento — Il moto per un arco infinitesimo della traiettoria può esser riguardato come risultante della velocità acquistata nel tempo precedente, e di un' azione acceleratrice secondo la linea di deviamento — Decomposizione della forza acceleratrice in due, l' una tangenziale e l'altra normale alla sua traiettoria — Un punto materiale animato da forza acceleratrice costantemente normale alla sua traiettoria, avrà moto uniforme e viceversa — Forza centripeta e centrifuga. Applicazione al moto di rotazione della terra — Esame del caso di una forza acceleratrice le cui componenti parallele agli assi siano derivate parziali di una stessa funzione di x, y, z. Applicazione alla discesa dei gravi per una curva qualunque — Principio della minima azione.

163. È noto che più forze agenti sopra un medesimo punto sono riducibili ad una sola (n° 18); e dal risultamento sperimentale esposto nel n° 149 sappiamo ancora che se più forze P_1, P_2, P_3;.. agenti secondo una stessa linea producano individualmente le velocità v_1, v_2, v_3,..., la loro risultante $R = P_1 + P_2 + P_3 + ..$ produrrà la velocità $V = v_1 + v_2 + v_3 + ..$

Ciò posto, immaginiamo agenti sopra un punto materiale quante forze continue si vogliano, e che decomposta ciascuna in tre altre, parallele a tre assi coordinati, si abbiano le risultanti parziali X, Y, Z. Poniamo ancora che in virtù delle forze agenti il mobile durante il tempo t abbia percorso l' arco s della sua traiettoria; allora $v = \frac{ds}{dt}$ sarà la sua

velocità, e $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$ ne sarà la forza acceleratrice. Or quando al terminare del tempo dt il punto avrà compiuto il suo moto per l'arco ds, le coordinate che alla fine del tempo t ne definivano il luogo nello spazio, saranno variate di dx, dy, dz; le quali sono collegate a ds colle relazioni che uniscono i tre spigoli di un parallelepipedo colla diagonale verso cui convergono. Ma nello stesso modo dipendono la velocità v (n° 149) dalle sue componenti secondo gli assi, e la forza φ (n° 18) dalle sue componenti X, Y, Z; dunque $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ rappresenteranno ad un tempo e le velocità componenti di $v = \frac{ds}{dt}$ e quelle che sarebbero prodotte dopo il tempo t dalle forze X, Y, Z. In conseguenza avremo

$$(1) \qquad X = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

164. Queste tre equazioni sono sufficienti all'esatta traduzione algoritmica di tutti i problemi che possono darsi relativamente al moto di un punto libero, animato da qualsivoglia numero di forze acceleratrici; e poichè esse contengono quattro variabili di cui una sola può essere indipendente, così richieggono che i dati del problema possano offrire tre condizioni distinte.

Ma se le equazioni (1) bastano alla traduzione del problema, l'imperfezione del Calcolo integrale potrà sovente farne desiderare la soluzione. Poniamo, a modo di esempio, che siano date le forze acceleratrici: allora X, Y, Z saranno funzioni note delle variabili x, y, z, t, ed avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,y,z,t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_1(x,y,z,t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_2(x,y,z,t).$$

Così la soluzione del problema, vale a dire la determinazione del luogo occupato dal mobile a qualunque istante del tempo, dipenderà da integrazione, non sempre attuabile, di equazioni differenziali del 2° ordine.

Ma poniamo che esse siano integrabili: in tal caso una 1ª integrazione ci darà

$$(2)\quad \frac{dx}{dt}=f(x,y,z,t)+c\,,\ \frac{dy}{dt}=f_1(x,y,z,t)+c_1,\ \frac{dz}{dt}=f_2(x,y,z,t)+c_2;$$

ed integrando di nuovo avremo

$$(3)\quad F(x,y,z,t,c)+C=0,\ F_1(x,y,z,t,c_1)+C_1=0,\ F_2(x,y,z,t,c_2)+C_2=0.$$

La soluzione del problema dipenderà dunque dalla determinazione delle sei costanti C,c, ecc. E sarà facile ottenerne i valori, quando sia noto lo *stato iniziale* del mobile, vale a dire che ne siano date la posizione e velocità nell'origine del tempo; perchè allora nell'ipotesi di $t=0$ saranno note le componenti $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ della velocità del mobile, e le coordinate x, y, z del luogo da esso occupato. Questi valori sostituiti nell'equazioni (2) faranno conoscere c, c_1, c_2; e quindi saranno ancora determinate C, C_1, C_2 mercè le equazioni (3) [1]. Così per ogni dato valore del tempo le equazioni (3) definiranno il luogo del mobile, e le equazioni (2) ne determineranno la velocità; e quando dalle equazioni (3) avremo eliminato la variaailc t, troveremo definite la forma e giacitura della traiettoria mercè due equazioni fra le tre variabili x, y, z.

165. Or applichiamo le tre equazioni (1) alla determinazioni del moto di un punto animato da forze impulsive. Poichè una tale ipotesi mena necessariamente all'idea di una velocità costante, avremo le tre equazioni

$$\frac{dx}{dt}=c\ ,\quad \frac{dy}{dt}=c_1\ ,\quad \frac{dz}{dt}=c_2\ ,$$

[1] La necessità di queste sei costanti è indicata dalla natura stessa del problema, poichè colle medesime forze acceleratrici la traiettoria prenderà tante forme e giaciture diverse, per quanti diversi valori potranno assumere le coordinate e la velocità del punto nell'istante in cui si darà principio alla valutazione del tempo.

le quali integrate ci daranno

$$x = ct + C \; , \; y = c_1 t + C_1 \; , \; z = c_2 t + C_2 \; ;$$

C, C_1, C_2 disegnando le coordinate del mobile nell' origine del tempo; e se dalle ultime equazioni elimineremo t, ne avremo due tra x, y, z che definiranno la traiettoria rettilinea del mobile nello spazio.

166. Nel caso che le forze agenti siano acceleratrici, la traiettoria del punto sarà rettilinea, se in ogni elemento di tempo la risultante delle forze andrà diretta secondo la linea della velocità prodotta nel tempo precedente. Or le componenti dell'azione acceleratrice dopo il tempo t essendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} \; , \; \frac{d^2y}{dt^2} \; , \; \frac{d^2z}{dt^2} \; ,$$

e quelle della velocità acquistata durante lo stesso tempo essendo

$$\frac{dx}{dt} \; , \; \frac{dy}{dt} \; , \; \frac{dz}{dt} \; ;$$

ne segue che le due direzioni non potranno coincidere in una sola, se non siano soddisfatte le equazioni di condizione

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{dz}{dt}} .$$

Le quali mercè una prima integrazione diverranno

$$\overset{e}{\log}\frac{dx}{dt} + C = \overset{e}{\log}\frac{dy}{dt} + C' = \overset{e}{\log}\frac{dz}{dt} + C'' ,$$

ossia (chiamando n, n', n'' i numeri di cui sono logaritmi C, C', C'')

$$n\frac{dx}{dt} = n'\frac{dy}{dt} = n''\frac{dz}{dt} .$$

Donde per nuova integrazione otterremo

$$y = \frac{n}{n'} x + c \, , \quad z = \frac{n}{n''} x + c'$$

La traiettoria è dunque rettilinea; e potremo compiutamente definirla, conoscendo la posizione e velocità del mobile nell' origine del tempo. Imperocchè conosciuta la velocità iniziale, resteranno determinati i coefficienti $\frac{n}{n'}$, $\frac{n}{n''}$; e dai valori di x, y, z corrispondenti alla posizione iniziale del mobile si dedurranno quelli delle costanti arbitrarie c e c'.

167. In ogni altro caso la forma della traiettoria sarà curvilinea; ed in ogni suo punto il mobile per la propria inerzia avrà tendenza di percorrere con moto uniforme il prolungamento dell' arco elementare in cui si trova, ossia la tangente al punto che occupa sulla traiettoria. Questa tangente e la velocità del mobile nel punto di contatto definiranno dunque la direzione e quantità di forza da cui il mobile sarà animato in quell' istante; e la divergenza da quella retta del pari che la successiva variazione della sua velocità, non sarannno prodotte che dalla susseguente azione delle forze acceleratrici. Poniamo, per esempio, che il mobile durante un certo tempo, a cominciare dall' istante in cui occupava il punto B *(fig. 103)* della sua traiettoria, ne abbia percorso l' arco BC; e che se avesse invece conservato la grandezza e direzione della velocità che aveva in B, sarebbe giunto nello stesso tempo al punto B della sua tangente BD. L'azione dunque delle forze acceleratrici, cominciata nell' istante immediatamente successivo a quello in cui il mobile occupava il punto B, lo ha deviato della quantità DC dal luogo a cui sarebbe pervenuto per effetto della forza che possedeva in B; e poichè la direzione e grandezza di questo deviamento dipendono dalla direzione e quantità dell' azione acceleratrice, così potremo riguardare la prima come un' espressione della seconda. Ed affinchè tale espressione sia esatta, è d' uopo che l' arco BC sia descritto in un tempo infinite-

simo, perchè così si potranno riguardare come nulle le variazioni contemporanee che potranno aver luogo nella direzione e quantità dell' azione acceleratrice. Or se BC e quindi BD sono infinitesimi del 1° ordine, la DC non potrà essere che funzione d' infinitesimi del 2° ordine. Ed in vero, chiamando x y z le coordinate del punto B e θ il tempo infinitesimo in cui si compie il moto per l' arco BC, avremo che al termine del tempo θ il mobile sarebbe giunto sulla tangente BD al punto definito dalle coordinate

$$x + \frac{dx}{dt}\theta\ ,\ y + \frac{dy}{dt}\theta\ ,\ z + \frac{dz}{dt}\theta\ ,$$

imperocchè il suo moto si sarebbe attuato parallelamente agli assi colle velocità $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ che aveva nel punto B. Ma per esprimere il moto lungo l' arco BC è d' uopo che gli spazii $\frac{dx}{dt}\theta$, $\frac{dy}{dt}\theta$, $\frac{dz}{dt}\theta$ siano aumentati di ciò ch' è dovuto all' azione acceleratrice svolta durante il tempo θ, e le cui componenti parallele agli assi sono $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$; quindi il luogo occupato dal mobile sull' arco BC alla fine del tempo θ, sarà definito dalle coordinate

$$x + \frac{dx}{dt}\theta + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\ ,$$

$$y + \frac{dy}{dt}\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\ ,$$

$$z + \frac{dz}{dt}\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\ .$$

Or sottraendo da queste le tre equazioni precedenti, i residui $\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\theta^2}{2}$ ci daranno, supponendo gli assi rettangolari,

$$DC = \frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \varphi\frac{\theta^2}{2},$$

φ rappresentando il radicale. Il deviamento DC equivale dunque allo spazio che il mobile, partendo dal punto D, percorrerebbe nel tempo θ sotto l'azione di una forza acceleratrice costante, eguale a φ. Or dalla legge di composizione delle forze si rileva che il mobile occuperà il punto C dopo il tempo θ, sia che si riguardi animato primieramente dalla forza $\frac{1}{dt}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{ds}{dt}$ diretta secondo la tangente e che lo trasporterà in D al termine del tempo θ, e poi per egual tempo dalla forza acceleratrice φ; sia che l'azione delle due forze s'immagini simultanea nell'istante in cui il mobile occupa il punto B. Possiamo dunque riguardare il moto per l'arco BC come risultante dell'azione simultanea della forza impulsiva $\frac{ds}{dt}$ o della forza continua φ.

E la forza φ può ancora esser decomposta in due altre, l'una secondo la tangente, l'altra secondo la EC ad essa perpendicolare. Avremo la prima moltiplicando φ pel coseno dell'angolo α che DC forma colla direzione della tangente; e poichè i coseni degli angoli che la DC forma cogli assi sono espressi da

$$\frac{d^2x}{\varphi dt^2},\ \frac{d^2y}{\varphi dt^2},\ \frac{d^2z}{\varphi dt^2},$$

e quelli degli angoli che vi forma la tangente sono

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds};$$

sarà

$$\cos\alpha=\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{\varphi dsdt^2}=\frac{d^2s}{\varphi dt^2};$$

quindi $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ sarà la componente di φ secondo la tangente. Quanto poi alla componente secondo EC osserviamo che la direzione limite di questa retta è quella della normale alla curva; e perciò chiamando R il raggio di curvatu-

ra dell' arco BC, il quale è descritto colla velocità v nel tempo θ, avremo

$$EC = \frac{\overline{BC}^2}{2R} = \frac{v^2\theta^2}{2R}.$$

La forza acceleratrice dunque che sollecita il mobile nella direzione EC, sarà rappresentata da $\frac{v^2}{R}$.

168. Se il punto percorresse la sua traiettoria con velocità costante, sarebbe $dv = 0$; quindi nulla la componente di φ secondo la tangente, ed il deviamento sarebbe sempre normale alla traiettoria. E viceversa: se un mobile è animato da forza acceleratrice normale alla sua traiettoria, questa sarà percorsa con moto uniforme; poichè essendo nulla la componente tangenziale $\varphi \cos \alpha = \frac{d^2s}{dt^2}$, sarà $\frac{ds}{dt} =$ costante.

169. La componente $\frac{v^2}{R}$ ha ricevuto il nome di *forza centripeta*, perchè spinge il mobile verso il centro di curvatura dell' elemento di arco che percorre. Ma se il mobile, progredendo secondo una certa direzione BD, fosse da una resistenza qualunque obbligato a descrivere l' arco BC, allora la sua naturale inerzia lo farebbe reagire contro l' ostacolo al suo moto con uno sforzo eguale alla componente normale della forza acceleratrice, da cui dovrebbe essere animato per descrivere liberamente l' arco BC; quindi è che $\frac{v^2}{R}$ ha ricevuto ancora il nome di *forza centrifuga*. In somma la componente normale del deviamento è forza centripeta, finchè si riguarda come azione che il mobile riceve da una cagione esteriore, ed è viceversa forza centrifuga quando esprime la reazione del mobile contro quella cagione.

Così il moto di rotazione della terra, comunicato ai gravi che poggiano sulla sua superficie, li spingerebbe secondo la tangente al parallelo su cui giacciono, se non fosse-

ro ritenuti dall' attrazione terrestre che li sollecita verso il centro del pianeta; e la reazione del grave contro questa cagione esteriore diminuisce altrettanto la sua tendenza verso il centro, ed in conseguenza il suo peso. Chiamando T la durata del moto di rotazione della terra, che sappiamo esser uniforme, ed R il raggio equatoriale, ogni punto della circonferenza di questo circolo avrà la velocità

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Nella quale espressione ponendo T = 86164″ ed R = 6377399 metri, risulterà

$$\frac{v^2}{R} = 0^m,03391.$$

È tale dunque la forza centrifuga sull' equatore terrestre che essa comunicherebbe ad un punto materiale la velocità di $0^m,03391$ in un secondo di tempo.

Daltronde l' energia della gravità equatoriale, dedotta da ricerche fatte col pendolo, è di $9^m,78078$; ed in conseguenza se la terra non avesse moto di rotazione, la forza con cui essa attrarrebbe i gravi giacenti sul suo equatore sarebbe

$$g = 9^m,78078 + 0^m,03391 = 9^m,81469.$$

Or dividendo 9,81469 per 0,03391 si ha prossimamente il quoziente 289; vale a dire che la forza centrifuga diminuisce la gravità equatoriale di circa $\frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}$. E perciò se il moto di rotazione della terra venisse a compiersi in un tempo 17 volte minore, la forza centrifuga, che aumenta come il quadrato della velocità, diverrebbe 289 volte più grande sotto l' equatore, ed ivi i corpi non avrebbero peso.

Sotto paralleli diversi dall' equatore diviene più piccolo il raggio del circolo descritto dai punti corrispondenti della superficie terrestre, e la forza centrifuga non oppone alla

gravità che una parte della sua energia. Sia AB *(fig. 104)* l'asse di rotazione della terra, CD il piano equatoriale, ed S un punto della superficie terrestre la cui latitudine poniamo $= \lambda$: sarà il raggio

$$SP = R\cos\lambda.$$

Ma la forza centrifuga f che sotto l'equatore è data dall'equazione

$$f = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

sotto il parallelo che ha per raggio R $\cos\lambda$ diverrà

$$f' = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos\lambda.$$

E decomponendo questa forza in due, l'una secondo il raggio OS, l'altra secondo la tangente ST, sarà la prima componente espressa da

$$f'\cos\lambda = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos^2\lambda,$$

e la seconda da

$$f'\operatorname{sen}\lambda = \frac{2\pi^2 R}{T^2} \operatorname{sen}2\lambda.$$

La componente $f'\cos\lambda$ essendo quella che si oppone alla gravità terrestre, ne segue che nell'ipotesi della sfericità del nostro pianeta la diminuzione, che patirebbe la sua forza attraente pel fatto della rotazione, sarebbe proporzionale al quadrato del coseno della latitudine. L'altra componente, aumentando nello stato primitivo della terra la massa equatoriale a spese di quella delle regioni polari, le fece prendere la forma di sferoide depressa; e se nello stato attuale la sua azione venisse a cessare colla rotazione che la produce, essa farebbe rifluire verso i poli una buona porzione dei mari equatoriali.

170. Ritornando sulle tre equazioni generali del moto

$$X = \frac{d^2x}{dt^2}, \ Y = \frac{d^2y}{dt^2}, \ Z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

moltiplichiamole rispettivamente per $2dx$, $2dy$, $2dz$; indi facciamone l' addizione: avremo

$$2(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{2dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = d\frac{ds^2}{dt^2} = d.v^2.$$

Or supponendo che X, Y, Z siano le derivate parziali di una funzione di x, y, z nella quale queste tre variabili entrino come indipendenti, sarà

$$Xdx + Ydy + Zdz = d.F(x,y,z);$$

quindi

$$v^2 = 2F(x,y,z) + C; \tag{4}$$

e supponendo che w, a, b, c siano i valori iniziali di v, x, y, z, avremo l' integrale definito

$$v^2 - w^2 = 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c).$$

La differenza $v^2 - w^2$ rappresenta il cangiamento avvenuto nel quadrato della velocità del mobile, passando dal punto (a, b, c) al punto (x, y, z), in funzione delle sole coordinate dei due punti. Laonde se le componenti secondo gli assi di una forza acceleratrice siano derivate parziali delle coordinate del luogo occupato dal mobile, il cangiamento prodotto nel quadrato della sua velocità, quando sarà passato da un punto ad un altro della sua traiettoria, sarà indipendente dalla lunghezza del cammino percorso e dal tempo impiegato in percorrerlo, e dipenderà soltanto dalle coordinate dei due punti.

Tutte le forze acceleratrici conosciute sono funzioni delle distanze dai loro centri di azione; ed in virtù di questa legge le loro componenti secondo gli assi divengono derivate parziali di esse funzioni. Ed in vero, indicando con $f(r)$ la

funzione che deve rappresentare l' intensità della forza acceleratrice alla distanza r dal centro di azione, con $a\ b\ c$ le coordinate di questo centro, e con $x\ y\ z$ quelle del mobile che ne dista della quantità r; avremo

$$X = f(r)\frac{a-x}{r}, \quad Y = f(r)\frac{b-y}{r}, \quad Z = f(r)\frac{c-z}{r};$$

ed in conseguenza

$$Xdx + Ydy + Zdz = f(r)\frac{(a-x)dx + (b-y)dy + (c-z)dz}{r}$$

Ma differenziando l' equazione

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

abbiamo

$$dr = -\frac{(a-x)dx + (b-y)dy + (c-z)dz}{r};$$

perciò sostituendo avremo

$$Xdx + Ydy + Zdz = -f(r)dr;$$

ed il primo membro di questa equazione dovrà essere un differenziale esatto, poichè tale è il secondo; vale a dire che X, Y, Z dovranno essere le derivate parziali di $f(r)$. Identico risultamente avremmo nell' ipotesi di più centri di azione, poichè allora si otterrebbe

$$(X+X'+..)dx + (Y+Y'+..)dy + (Z+Z'+..)dz = f(r)dr + \varphi(r)dr + ..,$$

donde per integrazione avremmo

$$v^2 - w^2 = -2\int f(r)dr - 2\int \varphi(r)dr - \ldots$$

Quindi nell' ipotesi di un' azione simultanea di più centri il cangiamento nel quadrato della velocità del mobile sarebbe la somma dei cangiamenti prodotti dalle singole forze.

171. Applicando l' equazione (4) alla discesa dei gravi, e prendendo l' origine nel centro della terra e l' asse delle

z nella verticale del punto di partenza, avremo

$$X = 0 \ , \ Y = 0 \ , \ Z = -\frac{gr^2}{z^2} \ ,$$

g disegnando la forza di gravità alla distanza r dal centro. Quindi supponendo nulla la velocità iniziale del grave, l'equazione (4) ci darà

$$v^2 = -2gr^2 \int_c^z \frac{dz}{z^2} = 2gr^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right) = 2gr^2 \frac{c-z}{cz}.$$

Laonde rappresentando AB (*fig. 105*) un arco di cerchio massimo ed O il centro della terra, un grave che scendesse per una curva qualunque mm', avrebbe in m' la velocità che avrebbe acquistato nel punto n d'intersezione della verticale mO colla superficie $m'n$ concentrica alla superficie terrestre. E questa legge, che la Fisica dimostra ponendo la gravità costante nelle piccole altezze dal livello del suolo, è dunque una conseguenza dell'essere questa forza dipendente dalla sola distanza del grave dal centro di azione, qualunque d'altronde sia per essere la natura di questa dipendenza.

172. Quando sia soddisfatta l'equazione

$$X dx + Y dy + Z dz = d.F(x,y,z),$$

vale a dire che le componenti della forza acceleratrice siano le derivate parziali di una certa funzione delle coordinate del luogo occupato dal mobile, allora la traiettoria avrà la proprietà che $\int v ds$, esteso tra due qualunque dei suoi punti, sarà minore o maggiore di quel che sarebbe rispetto ad ogni altra curva condotta per gli stessi punti. Ed in vero, è noto pel teorema fondamentale dei *massimi* e *minimi* delle funzioni integrali che per essere $\int v ds$ un massimo o un minimo, dovrà esser soddisfatta l'equazione

$$\delta \int v ds = 0.$$

Or dalle regole del Calcolo delle variazioni si ha

$$(5)\qquad \delta\int v ds=\int\delta.vds=\int(\delta v.ds+v.\delta ds);$$

e poichè $ds=vdt$, sarà

$$(6)\qquad \delta v.ds=\delta v.vdt=v\delta vdt=\tfrac{1}{2}\delta(v^2)dt.$$

Ma (n° 170)

$$v^2=2\int(Xdx+Ydy+Zdz);$$

quindi

$$\tfrac{1}{2}\delta(v^2)dt=(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dt$$
$$=\frac{d^2x}{dt}\delta x+\frac{d^2y}{dt}\delta y+\frac{d^2z}{dt}\delta z.$$

Daltronde essendo

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

sarà

$$\delta ds=\frac{dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz}{ds};$$

equazione che moltiplicata per $v=\frac{ds}{dt}$, ci dà

$$(7)\quad v\delta ds=\frac{dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz}{dt}=\frac{dx.d\delta x+dy.d\delta y+dz.d\delta z}{dt}.$$

Or sostituendo nell' equazione (5) i valori δvds e $v\delta ds$ dati dalle equazioni (6) e (7), avremo

$$\delta\int vds=\int\left(\frac{d^2x}{dt}\delta x+\frac{d^2y}{dt}\delta y+\frac{d^2z}{dt}\delta z+\frac{dx}{dt}d\delta x+\frac{dy}{dt}d\delta y+\frac{dz}{dt}d\delta z\right)$$
$$=\int d\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}dz\right)$$
$$=\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z.$$

E dovendosi definire $\int vds$ con estenderlo da un punto A ad un altro B della traiettoria, bisognerà sostituirvi una volta le variazioni δx, δy, δz corrispondenti al punto B, in-

di quelle relative al punto A, ed in fine sottrarre la prima espressione dalla seconda. Ma i punti A e B essendo fissi, le loro variazioni saranno nulle; altrettanto avverrà dell'integrale definito, e perciò sarà soddisfatta l'equazione

$$\delta \int v ds = 0.$$

173. Se $F(x, y, z)$, di cui si suppone che $X dx + Y dy + Z dz$ sia differenziale esatto, fosse eguale ad una costante, avremmo

$$(8) \qquad X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

equazione che potrà esser soddisfatta ponendo

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0,$$

vale a dire supponendo il mobile animato da sole forze impulsive. In tal caso il moto sarà uniforme, e $\int v ds = vs$ disegnerà un minimo, essendo rettilinea la traiettoria. Che se l'equazione (8) sia soddisfatta senza essere $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, allora la forza acceleratrice sarà normale alla traiettoria; in conseguenza la velocità sarà costante, ed avremo ancora $\int v ds = vs$. Ma questo prodotto, a differenza del caso precedente, non sarà sempre l'espressione di un minimo. Ed in vero immaginiamo un atomo obbligato a rimanere sulla superficie di una sfera in virtù di attrazione centrale, e che nè attrito nè resistenza di mezzo ostino allo scorrere del punto sulla superficie sferica. Se in tale ipotesi l'atomo sia spinto in direzione tangenziale al luogo che occupa, esso descriverà la circonferenza di un cerchio massimo; e l'arco intercetto tra due punti qualunque della traiettoria sarà un minimo ovvero un massimo, secondochè l'arco sarà minore o maggiore del semicerchio.

174. Quantunque nell'ipotesi di $X dx + Y dy + Z dz$ differenziale esatto, $\int v ds$ non rappresenti sempre un minimo, purtuttavia la legge di moto, che vi è racchiusa, va sotto il nome di *principio della minima azione*. Maupertuis fu

primo ad annunziarlo, formolandolo nel seguente modo: *quando un cangiamento ha luogo in Natura, la quantità di azione che lo produce è sempre la minima possibile*; ed egl' intendeva per *quantità di azione* il prodotto della massa del mobile per la velocità e per lo spazio percorso. I sarcasmi dell'empio Voltaire avevano fatto dimenticare questa bella scoverta del Maupertuis, quando Eulero faceva solenne vendetta dell' oltraggio recato alla ragione umana, dimostrando la realtà del principio di minima azione nelle traiettorie descritte in virtù di forze centrali [1]. Ma la gloria di estendere il teorema a qualsivoglia sistema di corpi, comunque attraentisi a vicenda o tendenti verso dei centri fissi, era serbata al genio di Lagrangia. Del resto anche prima del Maupertuis una certa idea di questo principio era sorta nella mente dei geometri. Così Tolomeo osservava che un raggio di luce seguendo la legge della riflessione specolare, percorre uno spazio minimo; e Fermat partendo da un simile concetto rinveniva col solo calcolo la legge di rifrazione della luce, che Snellio e Cartesio avevano dedotto dall' osservazione [2].

[1] Ved. la sua opera: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi vel minimi proprietate gaudentes.*
[2] Ved. la mia Fisica — 2ª edizione, tom. II, pag. 305.

CAPO QUARTO.

Applicazione della teorica, esposta nel capo precedente, alla soluzione di alcuni problemi dinamici.

I. *Determinare la legge del moto di un grave spinto in direzione obbliqua all' orizzonte* — La traiettoria nel vòto sarà una parabola conica — Ampiezza del tiro. Sua dipendenza dalla direzione della forza impulsiva — Determinazione del vertice della parabola. Tutte le parabole che possono risultare dalla diversa inclinazione della forza impulsiva, hanno una stessa direttrice. Il luogo geometrico dei loro vertici è un'ellissi. La curva che la involve è un'altra parabola conica — Legge della velocità lungo la traiettoria — Determinazione della direzione o del valore della forza impulsiva, in modo che il proietto colpisca un dato punto — Equazione della traiettoria dei proietti nei mezzi resistenti. Modo di descriverla per punti — Velocità del proietto lungo la traiettoria. Punto a cui corrisdonde la velocità minima — Asintoto verticale del ramo discendente. Limite di velocità nel proietto che lo percorre — Asintoto del ramo ascendente — Determinaziono della traiettoria nel caso che la forza impulsiva abbia piccolissima inclinazione all'orizzonte — Modo di definire la velocità iniziale ed il coefficiente di resistenza — II. *Determinazione della traiettoria di un punto materiale sottoposto all' azione di una forza centrale* — Legge delle aie. Dimostrazione del Newton — Equazione della traiettoria, essendo data la legge della forza in funzione della distanza: e viceversa — Applicazione al caso di una forza direttamente proporzionale alla distanza dal suo centro di azione. In tal caso la traiettoria sarà un'ellisse od un cerchio, se la forza è attrattiva; ed un'iperbole se ripulsiva — Reciprocamente: se un punto descriva un'ellisse in virtù di attrazione verso il centro di figura, la legge della distanza sarà quella della semplice ragion diretta — Applicazione al caso di una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro di azione. La traiettoria sarà una sezione unica, ed il centro di azione ne sarà uno dei fuochi. Condizioni che determinano la specie della sezione conica. Reciprocamente: un punto materiale descrivendo una sezione conica in virtù di forza diretta verso uno dei fuochi, la leggo della distanza sarà quella della ragione inversa dei quadrati. 2ª legge di Keplero — Applicazione al caso di una forza decrescente secondo i cubi delle distanze.

Esame delle diverse forme che assumerà la traiettoria, secondochè varieranno l'intensità della forza centrale e lo stato iniziale del mobile.

175. Mercè le equazioni generali del moto esposte nel capo precedente si possono risolvere parecchi problemi dinamici, di cui ci facciamo a considerare i più rilevanti.

I.

Determinare la legge del moto di un grave spinto indirezione obbliqua all'orizzonte.

Poniamo primieramente che il moto venga attuato in uno spazio vòto. Sia A *(fig. 106)* il punto di partenza del grave, ed AB la direzione della velocità impressa a, la quale faccia coll'orizzontale AE, che togliamo ad asse delle x, l'angolo BAE $= \alpha$. Essendo il mobile animato dalla forza impulsiva a e dalla gravità g diretta secondo le y negative, la sua traiettoria dovrà giacere nel piano verticale condotto per AB; quindi la legge del suo moto sarà definita dal sistema delle due equazioni

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\alpha\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Dall'integrazione della prima abbiamo

$$(1)\qquad x = at\cos\alpha\,;$$

e la seconda ci darà primieramente

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C,$$

in cui la costante C rappresenta $a\mathrm{sen}\alpha$, ch'è il valore della velocità $\frac{dy}{dt}$ nell'ipotesi di $t = 0$. Integrando di nuovo abbiamo

$$(2)\qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + at\,\mathrm{sen}\alpha.$$

E non aggiungiamo costanti agl' integrali, donde risultano i valori di x ed y, perchè queste variabili sono nulle nell' ipotesi di $t=0$.

Eliminando t dalle equazioni (1) e (2) risulterà quella della traiettoria

$$(3) \qquad y = x\tang\alpha - \frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha},$$

la quale rappresenta una parabola avente l' asse verticale, e che incontra quello delle x in due punti determinati dalle ascisse

$$x=0, \; x=\frac{2a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{a^2\operatorname{sen}2\alpha}{g}.$$

Il secondo valore di x, rappresentato nella figura dalla retta AE, dicesi *ampiezza del tiro*; e la sua massima grandezza corrisponde ad $\alpha=45.°$ Dando ad α valori equidistanti da 45°, le ampiezze dei tiri risulteranno eguali, poichè

$$\operatorname{sen}2(45°\pm\beta)=\operatorname{sen}(90°\pm2\beta)=\cos2\beta.$$

176. Cercando il valore massimo di y, avremo l'ordinata del vertice della parabola. Or prendendo la derivata dell'equazione (3) e pareggiandola a zero, abbiamo

$$x=\frac{a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g},$$

che sostituita nell' equazione della curva ci dà

$$y=\frac{a^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g},$$

che sarà l' ordinata del vertice.

Conosciute le due coordinate del vertice, sarà facile ridurre l' equazione della curva alla sua ordinaria semplicità ponendo nell' equazione (3).

$$x=\frac{a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g}-y', \quad y=\frac{a^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}-x'.$$

Così l'origine verrà trasportata nel vertice C, l'asse delle x si confonderà con quello della parabola, e l'equazione della traiettoria diverrà

$$y'^2 = \frac{2a^2\cos^2\alpha}{g}\, x'.$$

Quindi la distanza della direttrice dall' orizzontale AE sarà espressa da

$$\mathrm{CD} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{2a^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{a^2\mathrm{sen}^2\alpha}{2g} + \frac{a^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{a^2}{2g},$$

vale a dire dall' altezza produttrice della velocità a (n° 155). E quest' altezza essendo indipendente da α, è chiaro che una stessa direttrice avranno tutte le parabole che potranno risultare dai diversi valori di α.

177. Chiamando ξ ed η le coordinate del vertice C, ed eliminando a dalle due equazioni

$$\xi = \frac{a^2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}{g},\ \eta = \frac{a^2\mathrm{sen}\alpha}{2g},$$

risulterà tra ξ ed η l' equazione

$$4\eta^2 + \xi^2 - \frac{2a^2}{g}\eta = 0$$

che rappresenterà il luogo geometrico dei vertici di tutte le parabole che si potranno avere con una stessa velocità impressa, e facendo variare α da 0° a 360°. E la forma dell' equazione dimostra esser la curva dei vertici un'ellisse la quale confonde uno dei suoi assi con quello delle y, essendo l' altro parallelo all' asse delle x.

178. Per ottenere l' equazione dell' involvente le diverse parabole che potranno risultare dai diversi valori di α, conformemente alle regole del Calcolo elimineremo questa variabile tra l' equazione (3) e la sua derivata rispetto ad α

$$\tang\alpha - \frac{a^2}{gx} = 0\ ;$$

ed avremo

$$y = \frac{a^2}{2g} - \frac{gx^2}{2a^2}.$$

Donde

$$x^2 = \frac{2a^2}{g}\left(\frac{a^2}{2g} - y\right) = 4h(h-y),$$

indicando con h l' altezza a cui è dovuta la velocità a. La involvente è dunque una parabola che confonde il suo asse con quello delle y, ed ha il vertice lontano dall' origine A di una quantità eguale ad h. Essa incontra l' asse delle x in due punti simmetricamente distanti di $2h$ dall' origine.

179. Essendo

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

togliamo dalle equazioni (1) e (2) i valori, di dx e dy, e poniamoli in quello di v^2; avremo

$$v^2 = a^2 - 2a\text{sen}\alpha gt + g^2t^2,$$

pel cui mezzo conosceremo la velocità del proietto per ogni dato valore del tempo.

Or la mutua indipendenza delle azioni delle forze, dalla qnale risulta il parallelogrammo delle velocità, fa sì che il mobile percorrendo l' arco ACE impieghi lo stesso tempo che avrebbe consumato in percorrere l' orizzontale AE colla velocità costante $a\cos\alpha$. Ma essendo

$$\text{AE} = \frac{2a^2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{g} = at\cos\alpha,$$

sarà

$$t = \frac{2a\text{sen}\alpha}{g}.$$

E sostituito questo valore di t nell'espressione di v, avremo

$$v^2 = a^2;$$

vale a dire che nel punto E il mobile ha la stessa velocità che aveva in A. E se per giungere nel punto E gli è bisgnato il tempo $\frac{2a\operatorname{sen}\alpha}{g}$, egli è chiaro che sarà pervenuto in C dopo il tempo $\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{g}$; il quale valore, poichè rende $v = a\cos\alpha$, ci fa conoscere che la velocità del mobile nel vertice pareggia la componente orizzontale della velocità impressa.

La velocità costante della proiezione del moto su qualunque orizzontale giacente nel piano della parabola descritta dal proietto, fa sì che questo in tempi eguali dall'istante in cui avrà occupato il vertice, si troverà in punti simmetricamente situati sulla traiettoria. Ed ivi avrà velocità eguali, poichè ponendo

$$t = \frac{a\operatorname{sen}\alpha}{g} \pm \theta,$$

avremo sempre

$$v^2 = a^2\cos^2\alpha + g^2\theta^2.$$

Osserviamo inoltre che cercando il valore minimo di v, lo troveremo corrispondere a $t = \frac{a\operatorname{sen}\alpha}{g}$, vale a dire all'istante in cui il mobile occupa il vertice della curva. Esso dunque avrà dovuto ascendere con moto ritardato per l'arco AC, e discendere accelerato per l'arco CE; e questo risultamento era facile a prevedersi, imperocchè decomponendo la gravità in due, l'una tangente e l'altra normale alla traiettoria, si trova che la prima componente si oppone al moto lungo l'arco ascendente, e lo agevola in vece per l'arco discendente.

180. Nel problema, finora trattato, erano date la velocità impressa a, e la sua inclinazione α all'orizzonte, e ci siamo proposto determinare la natura della curva descritta dal proietto, ossia la dipendenza tra le coordinate x ed y di ogni suo punto. Or che questa dipendenza è nota, ci pro-

poniamo in vece di determinare una delle costanti a ad α in modo che la parabola descritta dal proietto passi per un punto dato. Supponendo che sia da determinarsi α, risolveremo l'equazione (3) rispetto a tangα, dopo avervi sostituito $1+\text{tang}^2\alpha$ ad $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Così avremo

$$\text{tang}\alpha = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2gy - g^2x^2}}{gx},$$

x ed y disegnando le coordinate del punto dato. In conseguenza, finchè sarà soddisfatta la relazione

$$a^4 > 2a^2gy + g^2x^2,$$

vi saranno due diversi valori di α, e quindi due parabole che risolveranno il problema. Il quale sarebbe impossibile, se fosse

$$a^4 < 2a^2gy + g^2x^2,$$

e non ammetterebbe che una sola parabola nel caso di

$$a^4 = 2a^2gy + g^2x^2.$$

Ma in questo caso y ed x soddisferanno all' equazione della parabola involvente (n° 178); il punto dunque giacerà su questa curva, e segnerà il luogo di contatto della traiettoria coll' involvente. E poichè il punto (y, x) dovrà giacere fuori dell' ultima curva, quando si abbia

$$a^4 < 2a^2gy + g^2x^2;$$

così non potrà appartenere a veruna delle parabole che ammettono la costante a, e perciò il problema risulta impossibile.

181. Se al contrario fosse dato l'angolo α e si cercasse il valore della velocità a da imprimersi al mobile, perchè la sua traiettoria passasse per un certo punto (y, x) avremmo

$$a^2 = \frac{gx^2(1+\text{tang}^2\alpha)}{2(x\,\text{tang}\alpha - y)};$$

valore infinito nell' ipotesi di $x\text{tang}\alpha = y$, ed immaginario quando fosse $x\text{tang}\alpha < y$. Dei quali risultamenti è sì facile l' interpetrazione meccanica, che crediamo superfluo qualsivoglia schiarimento.

182. Passiamo a determinare la traiettoria dei proietti nei mezzi resistenti. Supponendo il proietto omogeneo e di forma sferica, potremo riguardare come applicate al suo centro di figura la gravità, la forza impulsiva e la resistenza del mezzo; e poichè questa è sempre opposta alla direzione del moto, andrà continuamente diretta secondo la tangente alla traiettoria nel punto occupato dal mobile. Nel piano verticale della celerità impressa e pel punto di partenza immaginiamo condotta un' orizzontale, che prendiamo per asse delle x: chiamando v la velocità del proietto in un punto qualunque della traiettoria ed α l' angolo che essa forma coll' asse delle x, parallelamente a questo asse agirà la forza continua $-kv^2\cos\alpha$, kv^2 disegnando la resistenza del mezzo nell' ipotesi che la stabilisce proporzionale al quadrato della velocità. In conseguenza avremo

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -kv^2\cos\alpha.$$

Or essendo

$$dx = v\cos\alpha dt,$$

sarà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d.v\cos\alpha}{dt} = -kv^2\cos\alpha.$$

Quindi

$$\frac{d.v\cos\alpha}{v\cos\alpha} = -kvdt = -kds,$$

e

$$\overset{e}{\log}.v\cos\alpha = C - ks.$$

Per determinare la costante C poniamo che fatto $s = 0$ sia $v = c$ ed $\alpha = \theta$, sarà

$$C = \overset{e}{\log}.c\cos\theta;$$

perciò

$$\log^e \frac{v\cos\alpha}{c\cos\theta} = -ks,$$

e

$$v = \frac{c\cos\theta}{\cos\alpha} e^{-ks}.$$

A fin di ridurre quest' ultima equazione a contenere soltanto le variabili α ed s che sono funzioni note di x ed y, osserviamo che la traiettoria dovendo giacere nel piano verticale della celerità impressa, normalmente ad essa agirà la sola forza $g\cos\alpha$; e la componente normale di una forza acceleratrice essendo espressa da $\frac{v^2}{\rho}$, avremo

$$(5) \qquad g\cos\alpha = \frac{v^2}{\rho} = -\frac{v^2 d\alpha}{ds}$$

essendo $d\alpha$ negativo. E sostituendovi il valore di v tratto dall' integrale precedente, l' equazione della traiettoria risulterà

$$(6) \qquad \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = -\frac{g e^{2ks} ds}{c^2\cos^2\theta},$$

donde

$$\int \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = C - \frac{g e^{2ks}}{2kc^2\cos^2\theta}.$$

Per integrare il primo membro osserviamo che

$$\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \text{seg}.\alpha.d\,\text{tang}\alpha;$$

perciò facendo $tang\alpha = p$, si avrà

$$\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = dp\sqrt{1+p^2};$$

ed essendo

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2}),$$ [1]

l'equazione della traiettoria risulterà

$$(7) \qquad p\sqrt{1+p^2}+\overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2}) = \gamma - \frac{ge^{2ks}}{kc^2\cos^2\theta},$$

ponendo $\frac{1}{2}C = \gamma$. E facendo simultaneamente $s = 0$, e $p = \tang\theta$, risulterà il valore della costante

$$\gamma = \frac{g}{kc^2\cos^2\theta} + \tang\theta\sqrt{1+\tang^2} + \overset{e}{\log}(\tang\theta + \sqrt{1+\tang^2\theta}).$$

183. Quantunque l'equazione (7) non sia che la derivata

[1] Integrando per parti avremo

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Daltronde si ha

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \int\frac{1+p^2}{\sqrt{1+p^2}}dp = \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Addizionando le due equazioni si ottiene

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Or

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int\frac{dp\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{\sqrt{1+p^2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)} = \int\frac{d(p+\sqrt{1+p^2})}{p+\sqrt{1+p^2}} = \overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2});$$

quindi sostituendo si ottiene

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2})$$

prima di quella della traiettoria, che nello stato attuale del Calcolo è impossibile ottenere sotto forma finita, purtuttavia essa offrendoci il modo di determinare l'arco s per mezzo di *tangα*, ci concede di poter definire la curva per punti mercè la costruzione di un contorno poligonale, che divergerà tanto meno dalla vera forma della traiettoria, per quanto più piccole saranno le differenze per cui faremo variare *tangα*.

Ma potremo ancora costruire la curva per punti, determinando per ogni dato valore di *tangα* i corrispondenti valori di x ed y. A tal fine poniamo nell'equazione

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}}$$

il valore di ds dedotto dall'equazione esposta nel n° precedente

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g e^{2ks} ds}{c^2\cos^2\theta},$$

ed avremo

$$dx = -\frac{c^2\cos^2\theta}{g} e^{2ks} dp.$$

Dalla quale eliminando e^{-2ks} mercè l'equazione (7), risulterà

$$(8) \qquad dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}+\overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2})-\gamma}$$

E poichè $dy = pdx$, avremo

$$(9) \qquad dy = \frac{1}{k}\cdot\frac{pdp}{p\sqrt{1+p^2}+\overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2})-\gamma}$$

Integrando per approssimazione queste due equazioni, avremo i valori di x ed y in funzione di *tangα*, e potremo costruire la curva per punti. E se negl'integrali che defini-

ranno i valori di x ed y porremo $p = 0$, avremo le coordinate del vertice della traiettoria; come ancora avremo l'ampiezza del tiro nel valore di x corrispondente ad $y = 0$.

184. Volendo calcolare il tempo che dovrà impiegare il proietto, affinchè la tangente al punto estremo dell'arco descritto faccia un dato angolo α coll' asse x, porremo l'equazione (5) sotto la forma

$$g\cos\alpha = -\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\alpha}{dt},$$

donde

$$dt = \sqrt{-\frac{ds.d\alpha}{g\cos\alpha}}.$$

Dalla quale eliminando ds per mezzo dell' equazione (6) otterremo

$$dt = -\frac{c\cos\theta}{g}e^{-ks}dp;$$

ed in fine l'eliminazione di c^{-ks} mercè l' equazione (7) ci darà

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\cdot\frac{dp}{\left[\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log^e(p+\sqrt{1+p^2})\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or conoscendo dx, dy e dt in funzione di p abbiamo

$$v^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{g}{k}\cdot\frac{1+p^2}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log^e(p+\sqrt{1+p^2})}.$$

185. Abbiamo veduto (n° 179) che la velocità minima dei proietti nel vôto ha luogo nel vertice della parabola da essi descritta. Non è lo stesso pel moto attuale in un mezzo resistente: il punto corrispondente alla velocità minima giacerà sul ramo discendente della traiettoria. Ed in vero pren-

dendo rispetto a t la derivata dell'equazione (n° 182)

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{c.\cos\theta}{\cos\alpha} e^{-ks},$$

avremo

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{kc\cos\theta e^{-ks}}{\cos\alpha} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{c\cos\theta e^{-ks} \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

la quale, mercè la sostituzione di $\frac{c\cos\theta}{\cos\alpha} e^{-ks}$ a $\frac{ds}{dt}$ e di $-\frac{g\cos\alpha}{v} = -\frac{g\cos^2\alpha}{c\cos\theta} e^{ks}$ (n° 184) a $\frac{d\alpha}{dt}$, diviene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\operatorname{sen}\alpha - k\frac{c^2\cos^2\theta}{\cos^2\alpha} e^{-2ks}.$$

Or il 2° membro di questa equazione per divenire nullo è d'uopo che $\operatorname{sen}\alpha$ sia negativo; in conseguenza il punto corrispondente alla velocità minima dovrà giacere sul ramo discendente.

Osserviamo inoltre che essendo

$$v^2 = \frac{c^2\cos^2\theta}{\cos^2\alpha} e^{-2ks},$$

l'ipotesi di $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ ci darà

$$kv^2 = -g\operatorname{sen}\alpha.$$

Vale a dire che la velocità minima ha luogo, quando la resistenza del mezzo pareggia la componente tangenziale della gravità.

186. Nel vertice C (*fig. 107*) $\operatorname{tang}\alpha = p$ è nulla: al di là essa diviene negativa e può aumentarsi indefinitamente. E quando il suo valore sarà divenuto grandissimo, potremo riguardare come nullo quello di $\overset{e}{\log}(p + \sqrt{1+p^2}) - \gamma$ rispetto a $p\sqrt{1+p^2}$, il quale si ridurrà a $-p.-p = p^2$.

In tal caso avremo (n° 183)

$$kdx = \frac{dp}{p^2}, \quad kdy = \frac{dp}{p};$$

quindi

$$kx = C - \frac{1}{p}, \quad ky = C + \stackrel{e}{\log} p.$$

Laonde il ramo discendente della curva procede in modo che le ascisse dei suoi punti tendono verso un valore costante, mentre le ordinate corrispondenti crescono indefinitamente: vi è dunque un asintoto verticale.

Alla stessa conseguenza si perviene ancora mercè l'equazione

$$v = \frac{e.\cos\theta}{\cos\alpha} e^{-ks},$$

poichè la componente orizzontale $v\cos\alpha$ della velocità diviene nulla nell'ipotesi di $s = \infty$.

Per definire il luogo dell'asintoto cerchiamo il punto in cui questa retta taglierà la orizzontale CH condotta pel vertice C della traiettoria. Ponendo

$$p\sqrt{1+p^2} + \stackrel{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2}) - \gamma = \frac{1}{P},$$

è chiaro che la porzione CE, definita dall'asintoto, sarà data dall'equazione

$$CE = \frac{1}{k}\int_0^{-\infty} P dp.$$

487. Nella stessa ipotesi di p negativa e grandissima l'equazione

$$v^2 = \frac{g}{k} \cdot \frac{1+p^2}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \stackrel{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2})}$$

fa conoscere che v si approssima al valore costante $\frac{g}{k}$. Il moto dunque tende a divenire uniforme, e misura che la curva descritta dal proietto si avvicina al contatto dell' asintoto.

188. Anche il rame ascendente, prolungato al di là di A ammette un asintoto. Ed in vero dal valore γ dato nel n° 182 si rileva l' esistenza di un angolo acuto $\beta > 0$, tale che fatto $p = \text{tang}\beta$, risulti

$$(10)\quad \gamma - \text{tang}\beta\sqrt{1+\text{tang}^2\beta} - \overset{e}{\log}(\text{tang}\beta + \sqrt{1+\text{tang}^2\beta}) = 0.$$

Ma quando α avrà pareggiato β, le equazioni (8) e (9) dimostrano che p rimarrà costante, quantunque x ed y crescano all' infinito: vi è dunque pel ramo ascendente un asintoto inclinata all' asse delle x sotto un angolo β definito dall' equazione (10).

Per definirne il luogo si conduca per l' origine A la GL inclinata sull' asse delle x negative dell' angolo GAx' eguale al complemento di β: sarà GL perpendicolare all' asintoto. Considerando nella GL un nuovo asse dalle ascisse, la perpendicolare abbassatavi da un punto qualunque della curva, vi determinerà un segmento u rappresentato dall' equazione

$$u = x\text{sen}\beta - y\cos\beta,$$

la quale differenziata diverrà, mediante le equazioni (8) e (9),

$$du = \frac{1}{k}\cdot\frac{(\text{tang}\beta - p)dp}{\left[\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \overset{e}{\log}(p+\sqrt{1+p^2})\right]\cos\beta}.$$

Ed in quest' ultima espressione ponendo $\text{tang}\alpha$ e $\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$ in vece di p e dp, avremo

$$du = \frac{1}{k}\cdot\frac{(\text{tang}\beta - \text{tang}\alpha)d\alpha}{\left[\gamma - \text{tang}\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha} - \overset{e}{\log}(\text{tang}\alpha+\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha})\right]\cos\beta\cos^2\alpha},$$

ossia

$$du = \frac{1}{k} \cdot \frac{(\text{tang}\beta - \text{tang}\alpha)d\alpha}{U\cos\beta\cos^2\alpha},$$

facendo

$$\gamma - \text{tang}\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha} - \overset{e}{\log}(\text{tang}\alpha + \sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}) = U.$$

Or il valore di u, definito dall' asintoto, sarà espresso da

$$u = \frac{1}{k}\int_0^\beta \frac{(\text{tang}\beta - \text{tang}\alpha)d\alpha}{U\cos\beta\cos^2\alpha}.$$

189. Se l'angolo θ di proiezione sia molto piccolo, sarà ancora piccola l'elevazione della curva sull'asse delle x; e pei punti dell'arco, definito da questa orizzontale, $tang\alpha$ varierà tra limiti di una piccola frazione. Potremo dunque assumere $ds = dx$, e trascurare p^2 rispetto all'unità. Così l'equazione (n° 183)

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g e^{2ks} ds}{c^2\cos^2\theta}$$

diverrà

$$dp = \frac{d^2y}{dx} = -\frac{g e^{2kx} dx}{c^2\cos^2\theta},$$

che integrata due volte, determinando le costanti in modo che supposte x ed y nulle sia $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\theta$, ci darà

$$y = x.\text{tang}\theta - \frac{g(e^{2kx} - 2kx - 1)}{4k^2c^2\cos^2\theta},$$

che potrà rappresentare la traiettoria del proietto, finchè l'arco descritto non scenda molto sotto l'orizzontale condotta pel punto di partenza.

Nella stessa ipotesi l'equazione (n° 184)

$$dt = -\frac{c.\cos\theta}{g} e^{-ks} dp$$

diverrà

$$dt = -\frac{c\cos\theta}{g}\,e^{-kx}\cdot\frac{d^2y}{dx},$$

la quale, mercè la sostituzione del valore di sopra trovato per $\frac{d^2y}{dx}$, ci darà

$$dt = \frac{e^{kx}}{c\cos\theta}\,dx.$$

Donde

$$t = C + \frac{e^{kx}}{ck\cos\theta};$$

e poichè ad $x = 0$ corrisponde $t = 0$, sarà

$$t = \frac{e^{kx} - 1}{ck\cos\theta}.$$

190. Or supponiamo che il proietto dopo il tempo τ dall' origine del moto colpisca in un punto B (*fig. 108*) situato sotto l' orizzontale Ax ad una profondità $BC = \lambda$, essendo $AC = l$. Avremo così $y = -\lambda$, $x = l$, $t = \tau$, e le equazioni del n° precedente che danno i valori di y e t, diverranno

$$4k^2c^2\cos^2\theta(\lambda + l\tang\theta) = g(e^{2kl} - 2kl - 1),$$
$$ck\tau\cos\theta = e^{kl} - 1.$$

Così essendo dati l λ θ e τ, queste due equazioni determineranno la velocità iniziale c ed il coefficiente k della resistenza del mezzo.

Ma si potranno determinare c e k indipendentemente da τ ch'è ben difficile ad esser definito. A tale obbietto supponiamo che in due tiri differenti, pei quali θ e c abbiano conservato uno stesso valore, siano risultati per x i valori l ed l', e λ e λ' per l' abbassamento del punto colpito. Al-

lora la prima delle due equazioni precedenti ci darà

$$4k^2c^2\cos^2\theta(\lambda + l\,\mathrm{tang}\theta) = g\,(e^{2kl} - 2kl - 1)\,,$$

$$4k^2c^2\cos^2\theta(\lambda' + l'\,\mathrm{tang}\theta) = g(e^{2kl'} - 2kl' - 1)\,,$$

dalle quali eliminando c^2, avremo per determinare k la relazione

$$(\lambda' + l'\,\mathrm{tang}\theta)(e^{2kl} - 2kl - 1) = (\lambda + l\,\mathrm{tang}\theta)(e^{2kl'} - 2kl' - 1).$$

E conosciuto il valore di k, una qualunque delle due equazioni precedenti ci darà quello di c.

II.

Determinare la traiettoria di un punto materiale sottoposto all' azione di una forza centrale.

191. Prendendo ad origine il centro di azione, egli è chiaro che qualunque sia la legge della forza in funzione della distanza dal centro, le sue componenti secondo gli assi saranno proporzionali alle coordinate del luogo occupato dal mobile, poichè ad esse coordinate sono proporzionali i coseni degli angoli che la direzione della forza forma coi medesimi assi. Dovranno in conseguenza esser soddisfatte le equazioni

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}$$

ossia

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0\,,\quad x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

le quali integrate rispetto a t diverranno

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \mathrm{C}\,,\quad x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = \mathrm{C}'\,,\quad z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = \mathrm{C}''.$$

Or moltiplicando la 1ª di queste equazioni per z, la 2ª per y e la 3ª per x, ed addizionandone i prodotti, avremo

$$Cz + C'y + C''x = 0.$$

Dunque la traiettoria giacerà tutta nel piano condotto per l'origine della velocità impressa. E riguardando questo piano come quello delle $x\,y$, la legge del moto sarà definita dalla sola equazione

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

Ciò posto, sia A (*fig. 109*) il centro di azione, BC la traiettoria e θ l'angolo variabile che il raggio vettore, condotto al luogo m occupato dal mobile, farà coll'asse delle x. Il triangolo infinitesimo Amn, descritto nel tempo dt dal raggio vettore A$m = r$, sarà espresso da $\frac{1}{2}r^2 d\theta$; e $d\theta$ in funzione di x ed y è dato dalla differenziazione dell'equazione $\tan g\theta = \frac{y}{x}$, la quale ci dà

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2\cos^2\theta} = \frac{xdy - ydx}{x^2} \cdot \frac{x^2}{r^2}.$$

Quindi

$$\tfrac{1}{2}r^2 d\theta = \tfrac{1}{2}(xdy - ydx) = \tfrac{1}{2}Cdt.$$

Or chiamando λ l'aia descritta dal raggio vettore nel tempo t, sarà

$$\tfrac{1}{2}r^2 d\theta = d\lambda;$$

in conseguenza

$$(2) \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}\int Cdt = \tfrac{1}{2}Ct.$$

Laonde qualunque sia la legge della forza acceleratrice in funzione della distanza del mobile del centro di azione, saranno sempre le aie descritte dal raggio vettore proporzionali ai tempi corrispondenti.

E viceversa: se un corpo nel suo moto di traslazione descrive rispetto ad un certo punto aie proporzionali ai tempi, sarà necessariamente animato da una forza che avrà centro di azione in quel punto; imperocchè soddisfatta per ipotesi l'equazione (2), dovrà essere ancora l'equazione (1). Ma di questo teorema, considerato nel suo enunciato sì diretto che inverso, Newton ha dato la seguente elegantissima dimostrazione geometrica.

Sia A (*fig. 110*) il centro di azione, e BC l'archetto descritto dal mobile in un tempo infinitesimo. Se quando il mobile è pervenuto in C non intervenisse l'azione della forza centrale, la legge d'inerzia gli farebbe percorrere in un secondo infinitesimo di tempo la linea CD = BC; ma in virtù della forza che ha centro in A, ed il cui effetto nello stesso elemento di tempo supponiamo rappresentato da CH, il moto si comporrà dei due espressi in grandezza e direzione da CD e CH; ed in conseguenza in quell'infinitesimo di tempo il mobile percorrerà realmente la diagonale del parallelogrammo HD. Or essendo il triangolo ABC = ACD, ed ACD = ACE; sarà ABC = ACE, e la proporzionalità delle aie ai tempi rimane dimostrata.

Reciprocamente: sia il triangolo ABC = ACE, sarà ED parallela ad AC; ed il moto secondo CE risulterà dall'azione di due forze dirette secondo CD e CH. Perciò l'equivalenza dei due triangoli ABC ed ACE mena necessariamente all'esistenza di una forza CH diretta verso A.

Or Keplero aveva trovato per mezzo di osservazioni che tanto i pianeti intorno al sole, quanto i satelliti intorno ai pianeti primarii descrivono aie proporzionali ai tempi. E Newton mercè il teorema precedente ne deduceva che i satelliti gravitano verso i loro pianeti, e questi verso il sole.

192. Il principio delle aie esposto nel n° precedente non dipende che dalla direzione della forza acceleratrice. Finchè questa sarà costantemente diretta verso un punto, le aie descritte dal raggio vettore menato da quel punto, saranno

proporzionali ai tempi, qualunque sia per essere la variabile indipendente di cui la forza acceleratrice sarà funzione. Or poniamo che questa variabile consista nella distanza del mobile dal punto, pel quale passa costantemente la direzione della forza; e chiamiamo φ la funzione che dovrà disegnarne l' intensità alla distanza r dal centro di azione. Le sue componenti parallele agli assi, nel caso che l' azione sia attrattiva, saranno

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}\,;$$

i quali secondi membri sarebbero preceduti dal segno $+$, se la forza fosse ripulsiva. Addizionando le due equazioni dopo averne moltiplicata la 1ª per dx e la 2ª per dy, avremo

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{xdx + ydy}{r}\,;$$

ed essendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $dxd^2x + dyd^2y = \frac{1}{2}d.ds^2$, integrando si avrà

$$(3)\qquad \frac{ds^2}{dt^2} = -2\int\varphi dr\,,$$

supponendo la costante arbitraria implicita nel segno d' integrazione. Or il principio delle aie ci offre tra il raggio vettore r, l' angolo θ che esso forma coll' asse delle ascisse e la durata t del suo moto la relazione

$$r^2d\theta = cdt\,;$$

e dalla teorica delle equazioni polari abbiamo

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2.$$

Togliendo da queste equazioni i valori di dt^2 e ds^2 e sosti-

tuendoli nell' equazione (3), avremo

$$(4)\int\varphi dr=-\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{\frac{dr^2}{d\theta^2}}{r^4}\right]=-\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

Alla stessa equazione saremmo ancora pervenuti mercè il principio della minima azione; dapoichè sostituendo nell'espressione $\int v ds$ (n° 172) a v il suo valore $\sqrt{-2\int\varphi dr}$ e $\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$ a ds, avremo per le regole del Calcolo delle variazioni che sarà $\delta\int v ds=0$, se sia soddisfatta la condizione

$$d\,\frac{r^2d\theta\sqrt{-2\int\varphi ds}}{\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}}=0.$$

Donde avremo l' equazione

$$\frac{r^2d\theta\sqrt{-2\int\varphi dr}}{\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}}=c\,,$$

che risoluta rispetto a $\int\varphi dr$ riprodurrà l' equazione (4).

La costante arbitraria c che entra nell' equazione (4) potrà determinarsi mercè i dati costituenti lo stato iniziale del mobile. Così indicando A (*fig. 111*) il polo o centro di azione, m la posizione iniziale del mobile, ed α l'angolo che la direzione della sua velocità v_0 forma col raggio vettore $Am=r_0$; sarà $v_0 sen\alpha$ la componente di v_0 perpendicolare al raggio, la quale potendo ancora esprimersi con $\frac{r_0 d\theta}{dt}$, avremo

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{v_0 sen\alpha}{r_0}.$$

E sostituendo questo valore di $\frac{d\theta}{dt}$ nell' equazione

$$r_0^2 d\theta=cdt$$

somministrata dal teorema delle aie, si avrà

$$c = r_0 v_0 \operatorname{sen}\alpha.$$

Essendo data la funzione φ di r, l'equazione (4) farà conoscere la natura della traiettoria descritta dal mobile; e se viceversa è data la traiettoria, la differenziazione dell'equazione (4) darà la funzione

$$(5) \qquad \varphi = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right].$$

193. La prima ipotesi che facciamo sulla natura di φ è quella di supporre la forza direttamente proporzionale alla distanza del mobile dal centro di azione; dimodochè chiamando μ l' intensità della forza per l' unità di distanza, il suo valore alla distanza r sarà dato dall' equazione $\varphi = \mu r$. In questa ipotesi potremo far di meno dell' equazione (4), perchè le equazioni generali del moto divenendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y,$$

si potranno immediatamente integrare, attesa la separazione delle variabili x ed y [1]. Così avremo

$$x = \mathrm{A}\operatorname{sen} t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}\cos t\sqrt{\mu}$$
$$y = \mathrm{A}'\operatorname{sen} t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}'\cos t\sqrt{\mu}.$$

[1] Moltiplicando la 1ª per dx e la 2ª per dy, avremo

$$\frac{dx\,d^2x}{dt^2} = -\mu x dx, \quad \frac{dy\,d^2y}{dt^2} = -\mu y dy;$$

le quali mercè una prima integrazione ci daranno

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \mathrm{C} - \mu x^2, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \mathrm{C}' - \mu y^2,$$

Per avere le condizioni sufficienti alla determinazione delle quattro costanti A, B, A', B' prendiamo per asse delle x la congiungente il centro A (*fig. 111*) di azione colla posizione iniziale m del mobile, nella quale supponiamo v_0 la velocità ed α l'angolo che la sua direzione mt forma coll' asse Ah delle x. Quindi nell' ipotesi di $t=0$ avremo

$$y=0\,,\quad x=r_0\,,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\,\text{sen}\alpha\,,\quad \frac{dx}{dt}=-v_0\cos\alpha.$$

I quali valori sostituiti nelle equazioni precedenti e loro de-

donde

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{C-\mu x^2}}\,,\quad dt=\frac{dy}{\sqrt{C'-\mu y^2}}.$$

Quindi

$$t+c=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\text{arcosen}\,\frac{x\sqrt{\mu}}{\sqrt{C}}\,,\quad t+c'=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\text{arcosen}\,\frac{y\sqrt{\mu}}{\sqrt{C'}}\,;$$

dalla prima delle quali si avrà

$$x=\sqrt{\frac{C}{\mu}}\,\text{sen}(t\sqrt{\mu}+c\sqrt{\mu})=\sqrt{\frac{C}{\mu}}(\text{sen}t\sqrt{\mu}\cos c\sqrt{\mu}+\text{sen}c\sqrt{\mu}\cos t\sqrt{\mu}),$$

e dalla seconda

$$y=\sqrt{\frac{C'}{\mu}}\,\text{sen}(t\sqrt{\mu}+c'\sqrt{\mu})=\sqrt{\frac{C'}{\mu}}(\text{sen}t\sqrt{\mu}\cos c'\sqrt{\mu}+\text{sen}c'\sqrt{\mu}\cos t\sqrt{\mu}).$$

Ed in fine ponendo

$$\sqrt{\frac{C}{\mu}}\cos c\sqrt{\mu}=A\,,\quad \sqrt{\frac{C}{\mu}}\,\text{sen}c\sqrt{\mu}=B\,,$$

$$\sqrt{\frac{C'}{\mu}}\cos c'\sqrt{\mu}=A'\,,\quad \sqrt{\frac{C'}{\mu}}\,\text{sen}c'\sqrt{\mu}=B'\,;$$

risulteranno le equazioni date nel testo.

rivate, daranno

$$A = -\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{\mu}}, \quad B = r_0, \quad A' = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\mu}}, \quad B' = 0;$$

quindi

$$x = -\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen} t\sqrt{\mu} + r_0 \cos t\sqrt{\mu}$$

$$y = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen} t\sqrt{\mu},$$

da cui eliminando t risulterà l' equazione della traiettoria

$$(6) \quad \left(\frac{r_0^2 \mu}{v_0^2} + \cos^2\alpha\right) y^2 + 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, yx + \operatorname{sen}^2\alpha . x^2 - r_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 0.$$

Se μ è positiva, vale a dire se l' azione acceleratrice è attrattiva, l' equazione (6) rappresenterà un' ellisse che confonderà il suo centro di figura con quello di attrazione; e l' ellisse si ridurrebbe ad un cerchio, se fossero soddisfatte le due equazioni

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad r_0^2 \mu = v_0^2.$$

Se poi la forza fosse ripulsiva e quindi μ negativa, l' equazione (6) rappresenterebbe un' iperbole; ed i valori di x ed y mercè la sostituzione delle esponenziali alle funzioni circolari prenderebbero la forma

$$x = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{t\sqrt{\mu}} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{-t\sqrt{\mu}};$$

$$y = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{2\sqrt{\mu}} \left(e^{t\sqrt{\mu}} - e^{-t\sqrt{\mu}}\right).$$

Donde si rileva che, ponendo μ negativa, y ed x diverranno infinite insieme con t; mentre nel caso di μ positiva i valori di x ed y ammettono un periodo la cui durata è $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$.

194. Cerchiamo viceversa qual debba essere l'espressione della forza in funzione della distanza dal suo centro di azione, se per virtù sua un movimento ellittico viene ad attuarsi intorno a quel punto come centro di figura.

Nell' equazione dell' ellisse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

ponendo $y = r\text{sen}\theta$, $x = r\cos\theta$, avremo

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\text{sen}^2\theta\,,$$

che differenziata ci dà

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\,\text{sen}\theta\cos\theta.$$

Or dal valore

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{r}\sqrt{\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}}\,,$$

dato dall' equazione precedente, risulta

$$\cos\theta = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}}\,;$$

quindi

$$\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\,\text{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{r^2ab}\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}\,,$$

e

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2-r^2)(r^2-b^2)}{r^2a^2b^2}.$$

E questo valore sostituito nell' equazione (4) ci darà

$$\int\varphi dr = -\frac{c^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-r^2}{a^2b^2}\,;$$

donde risulterà mercè la differenziazione rispetto ad r

$$\varphi = \frac{c^2 r}{a^2 b^2}.$$

La forza dovrà esser dunque un'attrazione direttamente proporzionale alla distanza r dal suo centro di azione. Similmente si troverà la forza dover essere una ripulsione in ragion diretta della sua distanza dal centro nell'ipotesi di una traiettoria iperbolica.

195. Poniamo in secondo luogo che la forza centrale sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza del mobile dal centro di azione. La forza, che dinotiamo con μ per l'unità di distanza, diverrà $\frac{\mu}{r^2}$ alla distanza r. Perciò sarà

$$\int \varphi dr = \mu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r}.$$

Or nell'equall'equazione (3) abbiamo considerata come implicita nel segno d'integrazione la costante da doversi aggiungere a $\int \varphi dr$: volendola sotto forma esplicita, sarà facile conoscere che dovremo rappresentarla con v_0^2, v_0 indicando il valore della velocità iniziale. Così avremo

$$\frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r} = \tfrac{1}{2} v_0^2 - \frac{c_2}{2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right],$$

donde

$$d\theta = \frac{c d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - \left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} \right)^2}};$$

e

$$\theta = \gamma + \text{arcocos} \frac{\mu r - c^2}{r \sqrt{\mu^2 + c^2 \left(v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0} \right)}},$$

γ disegnando la costante introdotta dall'integrazione.

Sarà questa l'equazione polare della traiettoria, la quale dopo averle dato la forma

$$(7) \qquad \mu r = c^2 + r\sqrt{\mu^2 + c^2\left(v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right)}\cos(\theta-\gamma),$$

potremo facilmente tradurre in coordinate rettangolari, osservando che sarà

$$x = r\cos(\theta-\gamma),\ y = r\mathrm{sen}(\theta-\gamma),\ r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Mercè le quali sostituzioni avremo

$$(8) \quad \mu^2y^2 - c^2\left(v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right)x^2 - 2c^2\sqrt{\mu^2 + c^2\left(v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right)}.x - c^4 = 0;$$

ch'è precisamente l'equazione di una sezione conica, la quale sarà un'ellissi, un'iperbole o una parabola, secondochè il binomio $v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}$ sarà negativo, positivo o nullo. Dunque la specie di sezione conica descritta dal mobile dipenderà soltanto dai rapporti di grandezza che avranno luogo tra v_0, r_0 e μ; e la varia direzione della celerità iniziale, espressa dalla costante c, potrà soltanto far variare la grandezza degli assi della curva e la loro giacitura nello spazio.

Osserviamo inoltre che l'equazione (7) potendo assumere la forma

$$\mu r = c^2 + x\sqrt{\mu^2 + c^2\left(v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right)},$$

ci dimostra essere il raggio vettore una funzione razionale dell'ascissa. Il centro di attrazione giace dunque nel fuoco della traiettoria.

196. Nell'ipotesi che $v_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}$ sia un numero negativo, cerchiamo ridurre l'equazione (8) al centro dell'ellissi che

essa rappresenta. Ponendo

$$c^2\left(v_0^2-2\frac{\mu}{r_0}\right)=-m^2 \text{ e } c^2\sqrt{\mu^2+c^2\left(v_0^2-2\frac{\mu}{r_0}\right)}=n^2,$$

essa prenderà la forma

$$\mu^2y^2+m^2x^2-2n^2x-c^4=0\ ;$$

nella quale sostituendo $x'+\alpha$ ad x, avremo

$$\mu^2y^2+m^2x'^2+\left.\begin{matrix}2m^2\alpha\\-2n^2\end{matrix}\right|x'+\left.\begin{matrix}m^2\alpha^2\\-2n^2\alpha\\-c^4\end{matrix}\right\}=0.$$

Or determinando α mercè la relazione

$$2m^2\alpha-2n^2=0\ ,$$

sarà il termine costante

$$m^2\alpha^2-2n^2\alpha-c^4=-\frac{c^4\mu^2}{m^2}\ ;$$

ed avremo l'equazione al centro

$$\mu^2y^2+m^2x'^2=\frac{c^4\mu^2}{m^2}\ ,$$

nella quale i due semiassi a e b saranno dati dalle equazioni

$$a=\frac{c^2\mu}{m^2}\ ,\ b=\frac{c^2}{m}\ .$$

Ciò posto, il principio delle aie (n° 191) ci dà il tempo periodico T (ossia la durata del moto per l'intera curva) mercè l'equazione

$$T=\frac{1}{c}\int r^2d\theta=\frac{2\pi ab}{c}=\frac{2\pi c^3\mu}{m^3}\ ;$$

e moltiplicando per $\sqrt{\mu}$ i due termini dell' ultima frazione, avremo

$$T = \frac{2r}{\sqrt{\mu}} \cdot \left(\frac{c^2\mu}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or $\frac{c^2\mu}{m^2}$ è il semiasse maggiore della traiettoria ellittica; dunque: *nell' ipotesi che per azione di una stessa forza centrale reciproca ai quadrati delle distanze, più corpi descrivano traiettorie ellittiche intorno al centro di comune attrazione, i quadrati dei loro tempi periodici saranno direttamente proporzionali ai cubi degli assi maggiori.*

197. Reciprocamente: un punto materiale descrivendo una sezione conica in virtù di forza acceleratrice che ha centro in uno dei fuochi, cerchiamo la legge della forza in funzione della distanza dal suo centro di azione.

Chiamiamo p il semiparametro della curva, e il rapporto dell' eccentricità al semiasse a, e θ l'angolo che il raggio vettore forma col semiasse a condotto al vertice più vicino al fuoco, donde parte l' azione acceleratrice; sarà

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

l' equazione polare della traiettoria; e questa sarà un' ellissi, un' iperbole od una parabola, secondochè si avrà

$$e < 1, \ e > 1, \ e = 1.$$

Or dall' ultima equazione risulta

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{p};$$

quindi

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{e^2\mathrm{sen}^2\theta}{p^2} = \frac{p(2r-p)-(1-e^2)r^2}{p^2r^2}.$$

Sostituendo quest' ultima espressione nell' equazione (4), avremo

$$\int \varphi dr = -\frac{c^2}{pr} + \frac{(1-e^2)c^2}{2p^2};$$

donde poi differenziando si ottiene

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

La forza è dunque un attrazione reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze dal centro di azione.

198. Dall' equazione (n° 196)

$$T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{c}$$

abbiamo

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{c^2}.$$

Or dall' equazione (5) si ha

$$c^2 = \frac{\varphi r^2}{\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}}$$

e sostituendovi il valore di $\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$ tratto dall' equazione polare dell' ellissi, avremo

$$c^2 = \varphi r^2(1-e^2);$$

quindi

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\varphi r^2}.$$

Ciò posto, supponiamo due traiettorie ellittiche descritte in virtù di forze centrali intorno ad un fuoco comune, e che i quadrati dei loro tempi periodici siano come i cubi degli

assi maggiori delle due traiettorie: cerchiamo la legge con cui i due mobili tenderanno verso il fuoco comune delle loro orbite.

Chiamiamo T e T' i due tempi periodici, a ed a' i semiassi maggiori, φ e φ' le intensità delle due forze centrali corrispondenti ai raggi vettori r ed r' delle due ellissi. Pel dato del problema abbiamo

$$a^3 : a'^3 = \frac{4\pi a^3}{\varphi r^2} : \frac{4\pi a'^3}{\varphi' r'^4}$$

donde

$$\varphi r^2 = \varphi' r'^2 \text{ e } \varphi : \varphi' = r'^2 : r^2.$$

Le due forze centrali saranno dunque inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dal loro centro comune; e se rappresentiamo con μ e μ' le loro energie per l' unità di distanza, l' ultima proporzione ci darà $\mu = \mu'$.

199. Abbiamo indicato nel n° 191 la legge delle aie scoverta da Keplero nel movimento dei pianeti. Ma egli scovrì ancora che le curve dei pianeti sono ellissi descritte intorno al centro del sole come fuoco comune, e che i quadrati dei tempi periodici sono come i cubi degli assi maggiori delle orbite corrispondenti.

Or se dalla proporzionalità delle aie ai tempi Newton dedusse che i pianeti tendono verso il sole; dalla forma poi ellittica delle loro orbite e dalla proporzionalità dei quadrati dei tempi periodici ai cubi degli assi maggiori argomentò che la loro tendenza verso il centro solare debba seguire la ragion inversa dei quadrati delle distanze, ed aver lo stesso valore per punti equidistanti dal centro del sole: dimodochè immaginando due pianeti situati alla medesima distanza da questo centro ed abbandonati a loro stessi senza velocità iniziale, essi cadrebbero verso il sole con uno stesso movimento, e vi giungerebbero nel medesimo istante [1].

[1] Le tendenze dei pianeti verso il sole si debbono riguardare

Tutto ciò è chiaro per le cose dette nei numeri precedenti.

200. Poniamo in ultimo luogo che l'azione acceleratrice sia un' attrazione decrescente come i cubi delle distanze dal suo centro. Avremo così $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$; e l'equazione (5), dopo avervi sostituito a c il suo valore $v_0 r_0 \operatorname{sen}\alpha$, ci darà

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{r}\left[\frac{\mu}{v_0^2 r_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} - 1\right].$$

Or la differenza $\frac{\mu}{v_0^2 r_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} - 1$ potrà esser nulla, positiva o negativa. Seguendo la prima ipotesi avremo

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = 0, \text{ donde } \frac{1}{r} = A\theta + B.$$

E poichè nell' origine del moto ponendo $\theta = 0$, ne risulta $r = r_0$; sarà dunque $B = \frac{1}{r_0}$. Daltronde differenziando l'equazione della curva abbiamo $A = -\frac{dr}{r^2 d\theta}$; ma nell'ipote-

come risultanti di mutua attrazione delle loro molecole. Perciò chiamando M la massa del sole, m m' quelle di due pianeti qualunque, f l'intensità dell' attrazione tra un pianeta ed il sole per l'unità di distanza e di massa; i due pianeti alla stessa distanza δ dal centro del sole, vi tenderanno con forze rappresentate da $\frac{f(M+m)}{\delta^2}$, $\frac{f(M+m')}{\delta^2}$. Le quali forze non sono rigorosamente eguali, ma si possono riguardar tali, perchè m ed m' sono trascurabili rispetto ad M. E poichè la proporzionalità dei quadrati dei tempi periodici ai cubi degli assi maggiori suppone l' identità della forza centrale, così è ancora evidente che questo teorema di Meccanica razionale non è di rigore geometrico nella sua applicazione al sistema planetario; nel quale se lo riconosciamo come dato di osservazione, ciò dipende dall' estrema piccolezza delle masse dei pianeti in comparazione di quella del sole.

si di $\theta = 0$ si ha $\frac{dr}{rd\theta} = -\cot\alpha$; dunque $A = \frac{\cot\alpha}{r_0}$. E determinate così le due costanti, l'equazione della curva diverrà

$$r = \frac{r_0}{1+\theta\cot\alpha}.$$

Ponendo $\alpha = 90°$, avremo $r = r_0$ qualunque sia θ; la traiettoria sarà dunque circolare — Se $\alpha < 90°$, $\cot\alpha$ sarà positiva; il raggio vettore r andrà decrescendo coll'aumentarsi di θ, e ponendo $\theta = \infty$ risulterà $r = 0$. Il mobile tenderà dunque continuamente verso il polo, ove giungerà dopo un numero infinito di giri; compiuti però in un tempo finito, poichè l'equazione

$$r^2 d\theta = cdt = v_0 r_0 \operatorname{sen}\alpha dt$$

ci dà

$$t = \frac{r_0}{v_0\cos\alpha}\left[1 - \frac{1}{1+\theta\cos\alpha}\right];$$

quindi $t = \frac{r_0}{v_0\cos\alpha}$ nell'ipotesi di $\theta = \infty$. Ed attuandosi infiniti giri in un tempo finito, il mobile dovrà giungere al polo con una velocità anche infinita; conseguenza rifermata dall'equazione (3), la quale nell'ipotesi di $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$ conduce all'espressione

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2} + C,$$

che rende infinito il valore di v, ponendovi $r = 0$.

Per ottenere l'espressione del raggio vettore menato ad un luogo che il mobile occupava prima di giungere a quello che si è riguardato come iniziale, sarà d'uopo prendere θ negativamente; ed il valore di r sarà dato dall'equazione

$$r = \frac{r_0}{1-\theta\cot\alpha},$$

che lo renderà infinito nell' ipotesi di $\theta = \tan\alpha$. La traiettoria avrà dunque un' asintoto definito da quest' ultima relazione; la quale avrà luogo ancora nell' ipotesi di $\alpha > 90°$, che rendendo negativa $\cot\alpha$, darà $1 + \theta\cot\alpha = 0$ quando si abbia $\theta = \tan\alpha$.

201. Poniamo in secondo luogo che la differenza $\frac{\mu}{v_0^2 r_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} - 1$ sia negativa. Rappresentandola con $-n^2$, l' equazione differenziale della traiettoria diverrà

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{n^2}{r},$$

che integrata mercè l' introduzione del fattore $2d\frac{1}{r}$ ci darà

$$\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2} = C - \frac{n^2}{r^2}.$$

Per determinare la costante C osserviamo, come nel n° precedente, che fatto $\theta = 0$, sarà $r = r_0$, e $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{\cot\alpha}{r_0}$; in conseguenza $C = \frac{1}{r_0^2}(\cot^2\alpha + n^2)$, e

$$\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2} = \frac{1}{r_0^2}(\cot^2\alpha + n^2) - \frac{n^2}{r^2}.$$

Donde

$$n d\theta = \frac{n d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2}(\cot^2\alpha + n^2) - \frac{n^2}{r^2}}}$$

ed

$$n\theta = \operatorname{arcosen}\frac{n\frac{r_0}{r}}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}} + C.$$

Or l' ipotesi di $\theta=0$ rendendo $r=r_0$, darà
$C=-\text{arcosen}\,\frac{n}{\sqrt{\cot^2\alpha+n^2}}$; in conseguenza estendendo l'integrale da 0 a θ si avrà

$$n\theta=\text{arcosen}\,\frac{n\frac{r}{r_0}}{\sqrt{\cot^2\alpha+n^2}}-\text{arcosen}\,\frac{n}{\sqrt{\cot^2\alpha+n^2}};$$

donde è facile dedurre

$$\frac{r_0}{r}=\cos n\theta+\frac{\cot\alpha}{n}\,\text{sen}\,n\theta=\frac{\text{sen}(n\theta+\varepsilon)}{\text{sen}\,\varepsilon},$$

facendo $\frac{\cot\alpha}{n}=\cot\varepsilon$.

Differenziando l' ultima equazione avremo

$$d\frac{r_0}{r}=\frac{\cos(n\theta+\varepsilon)n\,d\theta}{\text{sen}\,\varepsilon},$$

che pareggiata a zero ci dà

$$n\theta+\varepsilon=\frac{\pi}{2}.$$

Questo valore di θ renderà massimo quello di $\frac{r_0}{r}$, ed in conseguenza minimo quello di r. Vi è dunque per la traiettoria un punto di minima distanza dal polo; e poichè aumentando o diminuendo di quantità eguali quel valore di θ, rimane invariata la frazione $\frac{r_0}{r}$; è chiaro che la curva sarà simmetrica rispetto al suo minimo raggio vettore.

Per conoscere poi se la curva ammetta o pur no asintoto, è d' uopo vedere se r possa divenire infinito, ciò che in realtà avverrebbe facendo $\text{sen}(n\theta+\varepsilon)=0$, ossia $n\theta+\varepsilon=\pi$. Ma perchè il raggio vettore facesse questo angolo θ coll'asse polare, sarebbe necessario un tempo infinito; come chiaramente si rileva dall' equazione $r^2d\theta=c\,dt$, dalla quale, dopo avervi sostituito il valore di r^2 dato dall' equazione

della curva, risulta

$$t = \frac{r_0^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{c} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2(n\theta + \varepsilon)} = \frac{r_0^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{nc} \left[\cot \varepsilon - \cot(n\theta + \varepsilon) \right];$$

valore che diviene infinito ponendo $n\theta + \varepsilon = \pi$.

202. Facciamo in fine che si abbia

$$\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} - 1 = n^2,$$

vale a dire che la differenza sia positiva. Sarà

$$\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = \frac{1}{r_0^2}(\cot^2\alpha - n^2) + \frac{n^2}{r^2};$$

donde

$$n\theta = \int_0^\theta \frac{n d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2}(\cot^2\alpha - n^2) + \frac{n^2}{r^2}}} = \log^e \frac{n\frac{r_0}{r} + \sqrt{\cot^2\alpha - n^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}}{n + \cot\alpha};$$

e passando dal logaritmo al numero corrispondente avremo

$$2\frac{r_0}{r}\left(1 + \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{n\theta} + \left(1 - \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{-n\theta}.$$

Dalla forma di questa equazione si rileva che r deve variare inversamente a θ; in conseguenza come crescerà il numero dei giri, così il mobile si troverà più vicino al polo, a cui perverrà finalmente, quando si avrà $\theta = \infty$. Ma questa infinità di giri sarà compiuta in un tempo finito, poichè sostituendo in $r^2 d\theta = c dt$ il valore di r dato dall'equazione precedente, avremo

$$dt = \frac{4r_0^2}{c} \cdot \frac{d\theta}{\left(\left(1 + \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{n\theta} + \left(1 - \frac{\cot\alpha}{n}\right)e^{-n\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{4r_0^2}{c} \cdot \frac{e^{2n\theta} d\theta}{\left(e^{2n\theta}\left(1 + \frac{\cot\alpha}{n}\right) + \left(1 - \frac{\cot\alpha}{n}\right)\right)^2}$$

donde

$$t = \frac{4r_0^2}{c}\int_0^\theta \frac{e^{2n\theta}d\theta}{\left(e^{2n\theta}\left(1+\frac{\cot\alpha}{n}\right)+\left(1-\frac{\cot\alpha}{n}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{2r_0^2}{nc\left(1+\frac{\cot\alpha}{n}\right)}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2n\theta}\left(1+\frac{\cot\alpha}{n}\right)+\left(1-\frac{\cot\alpha}{n}\right)}\right].$$

Nella quale espressione di t ponendo $\theta = \infty$, risulterà

$$t = \frac{r_0^2}{nc\left(1+\frac{\cot\alpha}{n}\right)}.$$

203. Tra i diversi valori che può assumere $\cot\alpha$ nell'ipotesi di n^2 positiva, è degno di nota quello di $\cot\alpha = \pm n$, che riduce $\mu = r_0^2 v_0^2$ e l'equazione della traiettoria a

$$r = r_0 e^{\mp n\theta}.$$

E dividendo questa equazione per la sua derivata

$$\frac{dr}{d\theta} = \mp n r_0 e^{\mp n\theta}$$

si ha

$$\frac{rd\theta}{dr} = \mp \frac{1}{n}.$$

Ma $\frac{rd\theta}{dr}$ esprime la tangente dell'angolo che il raggio vettore forma coll'elemento della curva; questa tangente è dunque costante, e la traiettoria è una spirale logaritmica.

CAPO QUINTO.

Del moto di un punto sopra una curva o superficie fissa.

Formole generali del moto di un punto obbligato a rimanere sopra una data curva — Loro applicazione alla discesa di un grave per una curva qualunque — Caso in cui la curva sia la circonferenza di un cerchio verticale — Condizione che in tal caso rende l' equazione del moto integrabile in termini finiti — Serie che, qualunque siano l' arco di escursione e la celerità iniziale, rappresenta il tempo in funzione dell' altezza della caduta — Soluzione diretta dello stesso problema — Pendolo semplice — Discesa dei gravi per archi cicloidali — Ragione meccanica del tautocronismo della cicloide — Pendolo cicloidale sincrono ad un pendolo circolare oscillante per archi infinitesimi, e la cui lunghezza pareggi il raggio osculatore nel punto più basso della cicloide — Questa curva è la sola tautocrona — Essa è ancora brachistocrona — Idea della sincrona. Proprietà notevole di questa curva — Formole generali pel moto di un punto sopra una superficie data — Loro applicazione al moto di un grave sopra un piano inclinato — Applicazione delle stesse formole al moto di un grave sulla superficie di una sfera — In qual caso la traiettoria del grave si confonderà colla circonferenza del cerchio massimo verticale condotto pel punto di partenza del grave — Espressione della forza normale da sostituirsi alla resistenza della superficie sferica — Attuazione del moto di un grave sopra una superficie sferica nelle oscillazioni di un pendolo a cui sia stata impressa una celerità normale al piano di oscillazione.

204. Allorchè un punto materiale in moto sarà costretto a non poter abbandonare una data curva, questa ne riceverà una pressione, risultante dalla componente normale delle forze acceleratrici donde il punto sarà animato, e dalla forza centrifuga generata dal moto. Chiamando P questa pressione, ed X Y Z le componenti delle forze acceleratrici date, è chiaro che potremo riguardare il punto materiale come interamente libero, ed animato dalle forze X, Y, Z e —P. E se poniamo ancora che α, β, γ siano gli angoli che la

direzione di P farà cogli assi, le equazioni (1) del n° 163 ci daranno per determinare il moto del punto sulla curva le relazioni

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=X-P\cos\alpha,\ \frac{d^2y}{dt^2}=Y-P\cos\beta,\ \frac{d^2z}{dt^2}=Z-P\cos\gamma.$$

E poichè P va diretta secondo la normale, ed i coseni degli angoli che la tangente alla curva fa cogli assi, sono espressi da $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sarà

$$dx\cos\alpha+dy\cos\beta+dz\cos\gamma=0.$$

Perciò moltiplicando le equazioni (1) rispettivamente per $2dx$, $2dy$, $2dz$ e poi addizionandole, dalla loro somma

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2(Xdx+Ydy+Zdz)$$
$$-2P(dx\cos\alpha+dy\cos\beta+dz\cos\gamma).$$

dovremo cancellar l' ultimo termine perchè nullo, ed avremo la relazione

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2(Xdx+Ydy+Zdz);$$

la quale nell' ipotesi che $Xdx+Ydy+Zdz$ sia un differenziale esatto, ci darà

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{ds^2}{dt^2}=v^2=C+2\varphi(x,y,z).$$

Conosceremo dunque la velocità del mobile in ogni punto della curva.

Indicando inoltre con

$$(2)\qquad x=f(z)\ \text{ed}\ y=f_1(z)$$

le equazioni delle proiezioni della curva sui piani delle xz ed yz, avremo

$$dx=f'(z)dz\ ,\ dy=f_1'(z)dz\ ;$$

quindi

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{dz^2(1+[f'(z)]^2+[f_1'(z)]^2)}{dt^2}$$
$$=C+2\varphi[f(z),\,f_1(z),\,z];$$

e ponendo per brevità

$$\frac{1+[f'(z)]^2+[f_1'(z)]^2}{C+2\varphi[f(z),f_1(z),z]}=\psi(z)\,,$$

avremo

$$t=\int\psi(z)dz.$$

È dunque la determinazione di t in funzione di z non altro che un problema di quadratura. E conosciuta la dipendenza di z da t, avremo in funzione della stessa t i valori di x ed y mercè le equazioni (2); quindi per ogni istante del tempo potremo assegnare il luogo del mobile sulla curva.

205. Applicando questa teorica al moto di un punto pesante sopra una curva data, e ponendo l'asse delle z verticale e diretto in senso opposto alla gravità, avremo

$$X=0\,,\ Y=0\,,\ Z=-g\,;$$

sarà in conseguenza

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=-gz\,,$$

e

$$v^2=C-2gz.$$

La quale costante C determinata mercè il valore w di v, corrispondente all'altezza $z=h$, ridurrà l'equazione precedente a

$$v^2-w^2=2g(h-z)\,;$$

e costituendovi a v^2 il suo equivalente $\frac{ds^2}{dt^2}$, avremo

$$\frac{ds^2}{dt^2}=w^2+2g(h-z).$$

Perciò se la curva, mutando forma, conservi inalterata la dipendenza di s da z, avverrà che il grave per identici valori del tempo ne occuperà gli stessi punti e colla medesima velocità. Quindi avvolgendo sopra un cilindro verticale qualunque la superficie proiettante la curva sul piano delle xy, la legge di moto del grave, conformemente al principio esposto nel n° 171, resterà inalterata.

Osserviamo ancora che essendo

$$(3) \qquad v^2 = \mathrm{w}^2 + 2g(h-z)\,,$$

il massimo valore di v sarà corrispondente a $z=0$; donde poi andrà decrescendo a misura che z diverrà più grande, fino a divenir nullo quando sarà soddisfatta l' equazione

$$z = h + \frac{\mathrm{w}^2}{2g}\,,$$

purchè questo valore di z sia conciliabile colle equazioni (2).

206. Supponiamo che la curva, sulla quale debba muoversi il grave, sia la circonferenza di un cerchio verticale, che abbia l' asse delle x nella tangente al punto più basso, e sia diametralmente attraversato da quello delle z. In conseguenza le due equazioni della curva saranno

$$y=0\,,\quad x^2-2az+z^2=0\,;$$

donde

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = \frac{a^2dz^2}{2az-z^2}\,;$$

e

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{a^2}{2az-z^2}\cdot\frac{dz^2}{dt^2} = \mathrm{w}^2 + 2g(h-z).$$

Quindi avremo

$$(4) \qquad dt = \frac{\mp\, a dz}{\sqrt{(2az-z^2)(\mathrm{w}^2+2gh-2gz)}}\,;$$

impiegando il doppio segno $\mp$, perchè la formola possa convenire tanto alla discesa del grave, nella quale dt e dz hanno segni opposti, quanto alla salita che fa convenire i due elementi dt e dz in un medesimo segno.

Or facendo $z = 0$ nell' equazione (3), il valore risultante

$$v = \sqrt{w^2 + 2gh}$$

esprimerà la velocità nel punto più basso della circonferenza; e

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{w^2}{2g}$$

disegnerà l' altezza a cui essa sarà dovuta: alla quale altezza se il grave potesse pervenire, ivi la velocità sarebbe nulla. Ma se poniamo

$$h + \frac{w^2}{2g} > 2a,$$

diametro del cerchio, il grave non potrà elevarsi all' altezza $h + \frac{w^2}{2g}$; e la sua velocità avrà soltanto un valore minimo nel punto definito da $z = 2a$. Quindi il grave continuerà a muoversi nello stesso senso, riproducendo indefinite volte le stesse fasi di velocità.

207. Se poi fosse

$$h + \frac{w^2}{2g} = 2a,$$

risulterebbe $v = 0$ nell' ipotesi di $z = 2a$; ma la salita del grave all' alteza $2a$ richiederebbe un tempo infinito. Ed in vero, l' ipotesi di $h + \frac{w^2}{2g} = 2a$ riducendo l'equazione (4) a

$$dt = \mp \frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{(2a - z)\sqrt{z}},$$

il tempo necessario al grave per ascendere dal punto più basso della circonferenza all' opposta estremità del diametro sarà dato da

$$t = \frac{a}{\sqrt{2g}} \int_o^{2a} \frac{dz}{(2a-z)\sqrt{z}}.$$

Or essendo la frazione

$$\frac{1}{2a-z} = \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left[\frac{1}{\sqrt{2a}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} \right],$$

sarà

$$\frac{dz}{(2a-z)\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}+\sqrt{z}} + \frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} \right];$$

quindi

$$\frac{a}{\sqrt{2g}} \int \frac{dz}{(2a-z)\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \int \left[\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}+\sqrt{z}} + \frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \; {}^{e}\log \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} + C.$$

ed estendendo l' integrale dal limite 0 al limite $2a$, avremo il tempo richiesto

$$t = \frac{a}{\sqrt{2g}} \int_o^{2a} \frac{dz}{(2a-z)\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \; {}^{e}\log \frac{2\sqrt{2a}}{0} = \infty.$$

Il grave dunque si approssimerà continuamente all' estremità superiore del diametro, senza pervenirvi giammai. E per veder chiaramente la ragion meccanica di questo risultamento algoritmico, è d' uopo osservare che durante la salita verticale il grave perde una dose della sua velocità, eguale al conato costante con cui la gravità lo sollecita in senso contrario; e questo conato costante, non essendo in-

finitesimo [1] quantunque piccolissimo, ripetuto per un tempo finito perviene a pareggiare la velocità che il grave possedeva nell'origine del suo moto ascensionale. Al contrario nella salita per l' arco circolare la perdita di velocità varia come il seno del valore angolare dell' arco che rimane ad esser percorso dal grave per giungere all' estremità superiore del diametro verticale. Ed allorchè questo arco sia divenuto sì piccolo da potersi sostituire al suo seno, le perdite successive della velocità saranno proporzionali ai termini della progressione

$$\div\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots\ldots$$

l' ultimo termine della quale dovrà essere *zero*, perchè la perdita di velocità dovrà esser nulla nell' estremo superiore del diametro verticale. Or una progressione geometrica decrescente non può giungere al limito *zero* senza esser composta di un numero infinito di termini; e la durata del moto dovendo avere una certa ragion diretta con esso numero di termini, dovrà ancor essa risultare infinita.

208. Consideriamo finalmente il caso di

$$h + \frac{w^2}{2g} < 2a.$$

Ponendo $h + \frac{w^2}{2g} = k$, avremo

$$(2az - z^2)(w^2 + 2gh - 2gz) = 4ag\left(1 - \frac{z}{2a}\right)(kz - z^2) = \frac{4ag(kz - z^2)}{\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-1}}$$

[1] Se quel conato costante, che trasforma la gravità in una forza continua, fosse infinitesimo, il peso non potrebbe risultare quantità finita senza supporre infinito il numero delle molecole di un corpo; ciocchè non è ammessibile. E la formola

$$v = \sqrt{2gs},$$

la quale non può ammettere v come infinitesimo del 1° ordine, se s non sia del 2°, riferma la stessa illazione, dapoichè dimostra che dopo il primo elemento di tempo il grave già possiede una velocità infinitamente grande rispetto all' altezza donde è caduto.

e l' equazione (4) diverrà

$$dt = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{kz-z^2}} \cdot$$

Quindi il tempo necessario al grave per discendere da $z = k$ a $z = 0$ si otterrà dall' espressione

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^k \frac{\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{kz-z^2}}$$

Per eseguire questa integrazione svolgiamo $\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ mercè la formola del binomio; avremo

$$\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{2a} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \ldots \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\left(\frac{z}{2a}\right)^n;$$

ed in conseguenza

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int_0^k \frac{dz}{\sqrt{kz-z^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\int_0^k \frac{zdz}{\sqrt{kz-z^2}} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6..2n(2a)^n}\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz-z^2}}\right].$$

Or per una nota formola di riduzione si ha

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{kz-z^2}} = -\frac{z^{n-1}\sqrt{kz-z^2}}{n} + \frac{(2n-1)k}{2n}\int \frac{z^{n-1} dz}{\sqrt{kz-z^2}} \text{ [1]};$$

[1] integrando per parti abbiamo

$$\int z^{n-2} dz (kz-z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z^{n-1}(kz-z^2)^{\frac{1}{2}}}{n-1} - \frac{k}{2(n-1)}\int z^{n-1} dz (kz-z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n-1)}\int z^n dz (kz-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

e poichè nei limiti *zero* e k, che sono quelli dell'integrale richiesto si ha

$$z^{n-1}\sqrt{kz-z^2}=0\,,$$

così avremo

$$\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz-z^2}} = \frac{(2n-1)k}{2n}\int_0^k \frac{z^{n-1}}{\sqrt{kz-z^2}}\,.$$

Or essendo $\int \frac{dz}{\sqrt{kz-z^2}} = \text{arcsenver}\,\frac{2z}{k}$, che esteso da k a 0 risulta $=-\pi$; sarà

$$\int_0^k \frac{z\,dz}{\sqrt{kz-z^2}} = -\frac{k}{2}\pi\,,\quad \int_0^k \frac{z^2 da}{\sqrt{kz-z^2}} = -\frac{1.3}{2.4}k^2\pi\,,\ldots.$$

$$\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz-z^2}} = -\,\frac{1.3.5..(3n-1)k^n}{2.4.6\ldots 2n}\,\pi\,;$$

e questi valori sostituiti nell'espressione di t ci daranno

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{k}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{k}{2a}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2nk2a}\right)^2\left(\frac{k}{2a}\right)^n\right].$$

Poichè è dato $k<2a$, questa serie sarà sempre convergente, e lo sarà rapidamente quando $\frac{k}{2a}$ sia una piccolissi-

Abbiamo ancora

$$\int z^{n-2}dz(kz-z^2)^{\frac{1}{2}} = \int z^{n-2}dz(kz-z^2)^{-\frac{1}{2}}(kz-z^2)$$
$$=k\int z^{n-1}dz(kz-z^2)^{-\frac{1}{2}}-\int z^n dz(kz-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sostituendo questo valore di $\int z^{n-2}dz(kz-z^2)^{\frac{1}{2}}$ nell' equazione precedente, risulterà la formola di riduzione data nel testo.

ma frazione. Supponendo che sia tale il suo grado di piccolezza da poterne riguardare come trascurabili le potenze superiori alla 1ª, avremo allora

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{k}{8a}\right).$$

E chiamando in questa ipotesi α il valore angolare dell' arco di discesa, avremo

$$k = a\,\text{senver}\alpha = a(1-\cos\alpha) = 2a\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha\,;$$

quindi

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha\right].$$

209. Allo stesso risultamento saremmo pervenuti, se in vece di riguardare il problema come un' applicazione delle formole generali del moto del punto sopra una data curva, ne avessimo cercato direttamente la soluzione. Sia ancora α il valore angolare dell' arco di discesa am *(fig. 112)*, e φ quello dell' arco bm che definisce la posizione b del grave dopo il tempo t. Egli è noto che, condotte le orizzontali bc ed an, il grave avrà nel punto b la velocità che avrebbe acquistato scendendo per la verticale nc. Or facendo il raggio $ao = a$, sarà $oc = a.\cos\varphi$, ed $on = a.\cos\alpha$; quindi sarà $nc = a(\cos\varphi - \cos\alpha)$; e sostituendo ad s questo valore di nc nella formola $v = \sqrt{2gs}$, avremo

$$v = \sqrt{2ga(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Daltronde è $v = \dfrac{ds}{dt}$, e $ds = ad\varphi$; e poichè φ decresce mentre si aumenta t, sarà $\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{ad\varphi}{dt}$. In conseguenza avremo

$$\frac{-ad\varphi}{dt} = \sqrt{2ga(\cos\varphi - \cos\alpha)}\,;$$

ed il tempo t della discesa dal punto a al punto più basso m sarà dato dall'equazione

$$t = -\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_o^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}.$$

Supponendo che il valore di α, ed in conseguenza quello di φ, siano si piccoli da poterne trascurare le potenze superiori alla 4ª nelle due serie

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \frac{\varphi^6}{2.3.4.5.6} + \cdots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.5} + \cdots,$$

avremo

$$\cos\varphi - \cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\alpha^2 - \varphi^2 - \tfrac{1}{12}(\alpha^4 - \varphi^4)\right) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)\left(1 - \tfrac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - \varphi^2}{\left(1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2) -\right)^{-1}}$$

quindi

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)}}{\left(1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)}}{1 + \frac{1}{24}(\alpha^2 + \varphi^2)},$$

fermandoci al 2° termine dello sviluppo di $\left(1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \varphi^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$ mercè la formola del binomio. E sostituendo questo valore di $\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}$ in quello di t, otterremo

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}}\int_o^\alpha \frac{\left[1 + \frac{1}{24}(\alpha^2 + \varphi^2)\right]d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}.$$

Or questo integrale si risolve nei tre seguenti

$$\int_o^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{\alpha^2}{24}\int_o^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\frac{1}{48}\pi\alpha^2 \text{ ed } \frac{1}{24}\int_\alpha^o \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}},$$

l'ultimo dei quali per una nota formola di riduzione ci dà

$$\int \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = -\frac{\varphi\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}},$$

e poichè nei limiti 0 ed α è $\varphi\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}=0$, sarà

$$\frac{1}{24}\int_0^\alpha\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}=\frac{\alpha^2}{48}\int_0^\alpha\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}=-\frac{\pi\alpha^2}{96}.$$

Quindi riunendo i tre integrali avremo

$$t=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right);$$

valore identico a quello ottenuto nel n° precedente, poichè essendo α abbastanza piccolo sarà $sen\alpha=\alpha$; ed in conseguenza si avrà $\frac{\alpha^2}{16}=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\text{sen}^2\frac{1}{2}\alpha$.

210. Dalle cose predette rilevandosi che il grave debba avere una stessa velocità nei punti della circonferenza determinati dall' intersezione di un' orizzontale, ne segue che la velocità acquistata dal grave nello scendere per l' arco *am (fig. 112)* lo farà salire sino al punto *d* determinato dall' orizzontale *ad* menata pel punto di partenza *a*. Ed il tempo della salita per l' arco *md* sarà eguale a quello impiegato nella discesa per l' arco *am*, poichè estendendo $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\alpha}}$ ai limiti $+\alpha$ e $-\alpha$, si avrà un valore doppio di quello ottenuto pei limiti 0 ed α.

Pervenuto poi che sarà il grave al punto *d* di massima altezza, dovrà discendere per l' arco *dm* e salire al punto *a* donde era partito; quindi scenderà di belnuovo, e continuerà indefinitamente e sempre colle stesse fasi questo moto alternativo, a cui si è dato il nome di *oscillazione*. Un atomo pesante sospeso ad un filo *om* inestensibile e senza peso attuerebbe una tal sorta di movimento: nell' atomo sospeso avremmo il *pendolo semplice*, le cui leggi di oscillazione ci sarebbero date dalle formole precedenti.

211. Consideriamo ancora la discesa di un grave per un

arco cicloidale ABC (*fig. 113*) giacente in un piano verticale, e la cui base AC sia parallella all'orizzonte. Ponendo l'asse delle y nella tangente orizzontale LK e quello delle x nella verticale elevata dal punto di contatto B, sarà

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a}{x}-1}$$

l'equazione della curva, $2a$ rappresentando il diametro del circolo generatore. Sia m il punto definito dall'ascissa $Bq = h$, ed n il punto definito dall'ascissa $Pp = x$ ed a cui supponiamo pervenuto il grave dopo il tempo t. Sarà la velocità in n espressa da

$$\frac{-ds}{dt} = \sqrt{2g(h-x)},$$

essendo che nella discesa del grave ds e dt hanno segni contrarii. E sostituendo a ds il suo valore $dx\sqrt{\frac{2a}{x}}$ tratto dall'equazione della cicloide, risulterà

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

Quindi il tempo t che dovrà impiegare il grave per giungere al punto più basso B sarà dato dall'equazione

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

È dunque t indipendente da h; e perciò da qualunque punto di AB parta il grave, impiegherà sempre lo stesso tempo per giungere in B. Questa notevole proprietà della cicloide dipende dalla sua forma e giacitura, le quali fanno sì che in ogni punto n dell'arco AB la componente tangenziale della gravità sia direttamente proporzionale alla lunghezza nB dell'arco da percorrersi. Ed in vero essendo $\sqrt{\frac{x}{2a}}$

il coseno dell'angolo, che la tangente al punto n dell'arco definito dall'ascissa x, forma coll'asse di questa coordinata, sarà $g\sqrt{\frac{x}{2a}}$ la componente tangenziale della gravità. La lunghezza d'altronde dell'arco nB esteso da 0 ad x è $2\sqrt{2ax}$; dunque l'arco, che rimane ad essere percorso, è proporzionale a $\sqrt{x}$ egualmente che la componente tangenziale della forza acceleratrice. Or egli è facile vedere come una tale proporzionalità produca la indipendenza del tempo dall'altezza della caduta. Poniamo per esempio che due gravi partano nel tempo stesso, l'uno da A e l'altro da n, supponendo l'arco AB $= 2n$B. Se nel primo elemento di tempo il grave che parte da A, percorra il cammino Ar, la proporzionalità della forza acceleratrice agli archi da percorrersi farà che lo spazio percorso nello stesso tempo dal grave partito da n, sia $ns = \frac{1}{2}$Ar. Saranno dunque i gravi contemporaneamente l'uno in r e l'altro in s: questo dovendo ancora percorrere lo spazio sB, e l'altro lo spazio rB $=$ AB $-$ Br $= 2(n$B$ - ns) = 2s$B. Dunque dopo il primo elemento di tempo gli spazii saranno tuttavia nella ragione di 2 a 1; e potendosi nello stesso modo dimostrare che questa ragione dovrà rimanere costante in tutti gli altri elementi della durata, è chiaro che quando il grave partito da n perverrà in B, in questo punto dovrà giungere contemporaneamente l'altro caduto da A, perchè in quel medesimo istante dovrà esser compiuto il moto per lo spazio AB $= 2.n$B.

212. Per questa costante durata della caduta dei gravi la cicloide ha ricevuto il nome di *tautocrona*; e tra tutte le curve essa sola gode di tale proprietà. Imperocchè essendo

$$v = \sqrt{2g(h-x)}$$

la velocità di un grave che lungo un arco di curva qualunque scenda dall'altezza $h - x$, la durata della caduta

dall' intera altezza h sarà espressa da

$$t=\sqrt{\frac{1}{2g}}\int_o^h\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Or perchè la curva sia tautocrona egli è necessario che il valore di ds, dedotto dalla sua equazione e sostituito nell' espressione precedente, renda $\int_o^h\frac{ds}{\sqrt{h-x}}$ indipendente da h. Sia l' arco $s=\varphi(x)$, e poniamo $x=hz$; avremo $ds=h\varphi'(hz)dz$, $\sqrt{h-x}=\sqrt{h}\sqrt{1-z}$, ed in conseguenza

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_o^1\frac{\sqrt{h}.\varphi'(hz)dz}{\sqrt{1-z}}.$$

E poichè il valore di questo integrale definito dev' essere indipendente da h, la sua derivata rispetto a questa quantità dovrà esser nulla; ed avremo

$$\frac{dt}{dh}=\frac{1}{2\sqrt{2gh}}\int_o^1\frac{\left[2hz\varphi''(hz)+\varphi'(hz)\right]dz}{\sqrt{1-z}}=0.$$

E ponendo

$$2hz.\varphi''(hz)+\varphi'(hz)=\varphi_1(hz),$$

sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{2gh}}\int_o^1\frac{\varphi_1(hz)dz}{\sqrt{1-z}}=\frac{1}{2h\sqrt{2g}}\int_o^h\frac{\varphi_1(x)dx}{\sqrt{h-x}}=0.$$

Or per esser soddisfatta questa equazione di condizione, è necessario che $\varphi_1(z)$ sia nulla di sua natura; poichè in contrario potremmo supporre h così piccola che $\varphi_1(x)$ conservasse lo stesso segno tra 0 ed h, ed allora gli elementi, di cui si compone l'integrale, avrebbero lo stesso segno, e la loro somma non sarebbe nulla. Quindi per essere $\frac{dt}{dh}=0$,

qualunque sia h, è necessario che sia

$$\varphi_1(x) = 2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0.$$

La quale equazione messa sotto la forma

$$2\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{1}{x}$$

ci dà mediante una prima integrazione

$$2\overset{e}{\log}\,\varphi'(x) = \overset{e}{\log}\frac{1}{x} + C\;;$$

donde passando da logaritmi ai numeri avremo

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}}.$$

Ed integrando di nuovo si avrà

$$\varphi(x) = 2\sqrt{cx},$$

senz' addizione di altra costante poichè supponiamo che $\varphi(x)$ ed x abbiano la stessa origine. Or dalla natura della funzione $2\sqrt{cx}$ esprimente la lunghezza dell' arco s si rileva che la curva tautocrona è la cicloide, generata da un circolo di diametro c, scorrente sopra una retta orizzontale.

213. Poichè $\int\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}$ ha da 0 ad h lo stesso valore che da h a 0, basterà raddoppiare il valore di t trovato nel n° **111** per ottenere la durata T di un' intera oscillazione per l' arco cicloidale. Così avremo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Ma $4a$ è il raggio del circolo osculatore al punto più bas-

so della cicloide; dunque un pendolo semplice che oscillasse per archi infinitesimi, avrebbe le sue oscillazioni indipendenti dalle lunghezze degli archi, non altrimenti che quelle attuate per archi cicloidali finiti.

Osserviamo ancora che il tempo impiegato dal grave in percorrere la semicicloide AB (*fig. 113*) essendo espresso da $t=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ e $t'=\sqrt{\frac{a}{g}}$ indicando quello che il grave impiegherebbe nella caduta pel diametro DB del circolo generatore; sarà

$$t:t'=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}:\sqrt{\frac{4a}{g}}=\pi a:2a,$$

vale a dire che il primo tempo sarà al secondo, come la semicirconferenza del circolo generatore è al suo diametro. I due tempi sono dunque incommensurabili tra loro.

214. La cicloide è ancora *brachistocrona*, ossia curva della più celere discesa. Siano dati due punti A e B (*fig. 114*) non situati sulla stessa verticale; e si cerchi qual curva debba descrivere un grave, perchè partendo dal punto A pervenga in B nel tempo più breve possibile. Sia ABD la curva richiesta, e B sia il punto occupato dal grave dopo il tempo t. Nell'elemento seguente dt il grave percorrerà l'archetto Bm colla velocità v dovuta all'altezza AC, sulla quale contiamo le x partendo dall'origine A. Quindi avremo

$$dt=\frac{\mathrm{B}m}{v}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v}.$$

Similmente prendendo $cp=\mathrm{C}c=dx$, e chiamando dt_1 il tempo infinitesimo che il grave impiegherà in percorrere l'elemento mn colla velocità v_1 dovuta all'altezza Ac, avremo

$$dt_1=\frac{mn}{v_1}=\frac{\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}}{v_1},$$

facendo $es = b$. I due elementi di tempo dt e dt_1 non potendo differire che di un infinitesimo di 2° ordine, dalla loro somma avremo

$$2dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v} + \frac{\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}}{v_1}.$$

E poichè il tempo della discesa per l'arco $Bm + mn$ dev'essere un minimo, sarà $d(2dt) = 0$, ossia

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dy\,d^2y}{\sqrt{dy^2+dx^2}} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{(b-dy)d^2y}{\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}} = 0\ ;$$

donde

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dy}{\sqrt{dy^2+dy^2}} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{b-dy}{\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}}.$$

I prodotti $v\sqrt{dx^2+dy^2}$ e $v_1\sqrt{dx^2+(b-dy)^2}$ sono quelli delle velocità per gli archi percorsi in due tempi elementari consecutivi, e dy, $b-dy$ sono i relativi aumenti delle ordinate; il rapporto dunque del prodotto $v\sqrt{dx^2+dy^2}$ all'aumento corrispondente dell'ordinata sarà lo stesso per tutti i punti della curva. Perciò chiamandone C il valore costante, avremo l'equazione

$$\frac{v\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = C\ ;$$

e poichè $v = \sqrt{2gx}$, così ponendo $\frac{C}{\sqrt{2g}} = \sqrt{a}$ l'equazione della curva diverrà

$$\frac{\sqrt{x(dx^2+dy^2)}}{dy} = \sqrt{a}\ ;$$

donde

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

ed

$$y + C = \int \frac{x dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Applicando a questo integrale la formola di riduzione del n° 108, avremo

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$
$$= -\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \text{ arc sen ver } \frac{2x}{a};$$

e poichè tanto y che il 2° membro dell' equazione divengono nulli ponendo $x = 0$, sarà $C = 0$, ed

$$y = \frac{a}{2} \text{ arc sen ver } \frac{2x}{a} - \sqrt{ax - x^2}$$

sarà l' equazione richiesta.

La brachistocrona nel vôto è dunque una cicloide, generata da un circolo di diametro a: la sua origine è nel punto superiore A, e la sua base è orizzontale. E sostituendo nella sua equazione ad y ed x lo coordinate β ed α del punto inferiore B, avremo per determinare il diametro a l' equazione

(5) $$\beta = \frac{a}{2} \text{ arc sen ver } \frac{2\alpha}{a} - \sqrt{a\alpha - \alpha^2}\ [1].$$

[1] Per costruire quest' equazione si osservi che ponendovi $\frac{\beta}{a}$ in vece di β, il suo 1° membro sarà diviso per a; essa dunque cesserebbe di esser soddisfatta, se lo stesso fattore $\frac{1}{a}$ non fosse introdotto nel 2° membro. Ma questo sarà diviso per a col fare in esso $a = 1$ e poi sostituirvi $\frac{\alpha}{a}$ ed α. Avrà dunque luogo l'equazione

$$\frac{\beta}{a} = \frac{1}{2} \text{ arc sen ver } \frac{2\alpha}{a} - \sqrt{\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha^2}{a^2}};$$

Riguardo poi al tempo che dovrà impiegare il grave per discendere dal punto A al punto B lungo l'arco cicloidale, ne avremo il valore dall' equazione

$$t = \int_o^a \frac{ds}{v},$$

nella quale ponendo $v = \sqrt{2gx}$ e l'espressione di ds tolta dall' equazione della cicloide, otterremo

$$(6) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_o^\alpha \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \text{arc sen ver} \frac{2\alpha}{a}.$$

215. Se i due punti A e B giacessero in una stessa verticale, avremmo $\beta = 0$, e l'equazione (5) diverrebbe

$$\frac{2\sqrt{a\alpha - \alpha^2}}{a} = \text{arc sen ver} \frac{2\alpha}{a}.$$

dalla quale chiaramente si rileva che il punto $\left(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{a}\right)$ giace sopra una cicloide il cui circolo generatore ha il diametro $= 1$. Ma per la proporzione

$$\frac{\beta}{a} : \frac{\alpha}{a} = \beta : \alpha$$

il punto $\left(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{a}\right)$ deve stare sulla congiungente i punti A e B (*fig. 115*); dunque starà nell' intersezione C di questa retta colla cicloide suindicata. Così avremo

$$AC : AB = \frac{\beta}{a} : \beta = 1 : a.$$

Basterà dunque sull' orizzontale AD descrivere una cicloide con un circolo di diametro $= 1$; condurre la AB che intersecherà la cicloide in un punto C; ed il quarto proporzionale in ordine ad AC, AB e 1 sarà il diametro del circolo generatore della cicloide che passerà pei due punti dati.

Ma $\frac{2\sqrt{a\alpha-\alpha^2}}{a}$ rappresenta il seno dell'arco di cui è senoverso $\frac{2\alpha}{a}$; dunque dovrà esser l'arco eguale al seno. E perchè questa eguaglianza sia soddisfatta, qualunque sia α, è necessario porre $a=\infty$. La verticale dunque, che congiunge i due punti, sarà la brachistocrona richiesta. Nella medesima ipotesi l'equazione (6) ci darà

$$t=2\sqrt{\frac{1}{2g}\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{a}\right)},$$

che ponendovi $a=\infty$ diviene

$$t=\sqrt{\frac{2\alpha}{g}},$$

qual'è precisamente nello spazio vôto il tempo della caduta verticale di un grave dall'altezza α.

216. Un'altra proprietà notevole della cicloide è quella che la componente normale della gravità pareggia la forza centrifuga del grave che per essa discende; e perciò la pressione che la curva ne soffre è doppia della stessa forza centrifuga. Ed in vero, supponendo orizzontale la base della cicloide e l'asse delle x nella verticale condotta pel vertice A (*fig. 114*) della curva, la componente normale della gravità sarà espressa da $g\frac{dy}{ds}$, e $\frac{v^2}{\rho}=\frac{2gx}{\rho}$ ne disegnerà la forza centrifuga. Or togliendo i valori di dy, ds e ρ dall'equazione

$$dy=\frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

che rappresenta la cicloide nell'ipotesi da noi fatta, avremo

$$g\frac{dy}{ds}=g\sqrt{\frac{x}{a}},\ \rho=2\sqrt{ax}\ \text{e}\ \frac{2gx}{\rho}=g\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

È dunque la forza centrifuga eguale alla componente normale della gravità; ed in conseguenza la pressione sofferta dalla curva n'è il doppio.

217. Abbiamo cercato nella cicloide a base orizzontale qual sia la ragione della pressione alla forza centrifuga: all' opposto cerchiamo in generale qual debba essere la curva che nella discesa dei gravi renda soddisfatta una data ragione m tra la pressione e la forza centrifuga. Supponendo tuttavia che l' asse delle x sia verticale e nel senso della gravità, ed orizzontale quello delle y, avremo l' equazione

$$g\frac{dy}{ds} \pm \frac{v^2}{\rho} = \pm m\frac{v^2}{\rho},$$

la quale col porvi $m = n + 1$ si riduce a

$$(7) \qquad g\frac{dy}{ds} = \pm n\frac{v^2}{\rho}.$$

Il doppio segno vi è stato introdotto, perchè l' equazione convenisse alle curve convesse egualmente che alle concave verso l' asse delle x, essendo che rispetto alla prima ρ e $g\frac{dy}{ds}$ vanno nello stesso senso, ed in senso opposto nelle seconde.

Facendo $= \sqrt{2gh}$ la velocità v_0 nel punto x_0, la velocità v nel punto x sarà data dall' equazione

$$v^2 = 2g(x - x_0 + h) = 2g(x - k),$$

ponendo $h - x_0 = -k$. Facciamo ancora $\frac{dx}{dy} = p$, sarà

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Sostituendo nell' equazione (7) questo valore di $\frac{dy}{ds}$ insieme

all' altro di

$$p = \mp \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dy}} = \mp \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{pdp}{dx}},$$

avremo

$$1 = -\frac{2pdp}{1+p^2} \cdot \frac{n(x-k)}{dx};$$

donde

$$-\frac{dx}{n(x-k)} = \frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Mercè una prima integrazione si ottiene

$$-\frac{1}{n}\overset{e}{\log}(x-k) + C = \overset{e}{\log}(1+p^2);$$

in conseguenza

$$\left(\frac{c}{x-k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1+p.$$

E sostituendo $\frac{dx}{dy}$ a p, una seconda integrazione ci darà

$$y - c' = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{c}{x-k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}}.$$

Or questo integrale può ottenersi in termini finiti nelle seguenti ipotesi

— 1° $n = 1$. In questo caso avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{c}{x-k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}} = \int \frac{\sqrt{x-k}.dx}{\sqrt{c-(x-k)}} = \int \frac{(x-k)dx}{\sqrt{c(x-k)-(x-k)^2}}.$$

La curva è dunque una cicloide, la cui base dista di k dall' asse delle y. Ma avendo supposto $n = 1$, sarà $m = 2$; e perciò la cicloide è la sola curva, sulla quale un grave

scendendo esercita una pressione doppia della forza centrifuga.

—2.° $n=-1$; quindi $m=0$; e la pressione del grave sarà nulla, scendendo per la curva rappresentata dall'equazione

$$y-c'=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{x-k}{c}-1}}=\int\frac{\sqrt{c}.dx}{\sqrt{x-k-c}}=2\sqrt{c}\sqrt{x-k-c}.$$

Donde

$$(y-c')^2=4c(x-k-c).$$

La curva richiesta è dunque una parabola conica che gira la sua convessità all'asse delle y, e di cui c' e $k+c$ sono le coordinate del vertice. Ed invero, sapendosi (n° 175) che una curva di questa natura segna la via dei proietti nel vôto, è chiaro che necessariamente in ogni punto di essa la forza centrifuga dovrà pareggiare la componente normale della gravità.

—3.° $n=\frac{1}{2}$; quindi $m=\frac{2}{3}$, vale a dire che la pressione starà alla forza centrifuga come 3 a 2. In questa ipotesi la funzione da integrarsi diverrà

$$\int\frac{(x-k)dx}{\sqrt{c^2-(x-k)^2}}=-\sqrt{c^2-(x-k)^2}.$$

Quindi

$$(y-c')^2+(x-k)^2=c^2.$$

Si ha dunque un cerchio di raggio arbitrario c, e del cui centro sono coordinate c' e k. Esso giacerà inferiormente all'asse dalle y, poichè abbiamo supposto nella traduzione algoritmica del problema generale che dx e ds avessero lo stesso segno, ed aggiungiamo ancora che avendo fatto $k=x_0-h$, sarà k il minimo valore di x_0, ed in conseguenza il grave non potrà partire da un punto più alto del-

la intersezione della circonferenza col suo diametro orizzontale.

—4.ª Finalmente sia $n = -\frac{1}{2}$; quindi m, rapporto della pressione alla forza centrifuga, sarà $= \frac{1}{2}$. Avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{c}{x-k}\right)^2 - 1}} = c \int \frac{dx\left[1 + \frac{x-k}{\sqrt{(x-k)^2 - c^2}}\right]}{\sqrt{(x-k)^2 - c^2}\left[1 + \frac{x-k}{\sqrt{(x-k)^2 - c^2}}\right]}$$

$$= c \overset{e}{\log}\left[\frac{x-k+\sqrt{(x-k)^2 - c^2}}{c}\right].$$

In conseguenza

$$e^{\frac{y-c'}{c}} = \frac{x-k+\sqrt{(x-k)^2-c^2}}{c};$$

equazione, che innalzata a quadrato e poi divisa par $e^{\frac{y-c'}{c}}$, si riduce a

$$x-k = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{y-c'}{c}} + e^{-\frac{y-c'}{c}}\right].$$

La curva è dunque una catenaria avente il parametro c, e del cui vertice, che sarà situato in alto, saranno coordinate $x = k+c$, ed $y = c'$.

218. Immaginiamo una serie di curve AC, AD, AE ecc. *(fig. 116)* giacenti tutte in uno stesso piano verticale GAB, e che avendo in A un'origine comune ed in AB il loro asse delle y, non differiscano che pel valore assoluto di una costante contenuta nella loro equazione generica: si cerca su ciascuna di esse un punto m tale che gli Archi Am, Am', Am'' ecc. siano descritti da un grave in tempi eguali. È questo il problema che sotto la forma più generale mena alla ricerca della ***curva sincrona***, che sarà il luogo geometrico del punto m.

Sia $y = f(x)$ l'equazione generica delle curve date ; e rappresenti h l'altezza donde il grave discenderebbe verticalmente nello stesso tempo t in cui dovrà percorrere uno degli archi Am. Nel moto per uno qualunque di questi archi il tempo t sarà espresso da una certa funzione $\varphi(x)$ della x del punto m, e sarà poi $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ nella discesa verticale. Avremo così

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = \varphi(x) ;$$

ed eliminando tra questa e l'equazione $y = f(x)$ quella costante per cui una curva differirà dall' altra, avremo la richiesta equazione della *sincrona*.

Poniamo per esempio che le linee AC, AD, AE *(fig. 117)* siano altrettante rette, che saranno espresse dall' equazione

$$x = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}} y ,$$

α indicando l'angolo che esse formano coll' orizzontale AB. Sarà

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{g.\text{sen}\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} ;$$

ed eliminando *senα* tra questa e l'equazione precedente ; avremo l'equazione della sincrona

$$y^2 = hx - x^2 ,$$

ch' è quella di un cerchio descritto sull'altezza h come diametro. Dunque tutte le corde, concorrenti nell' estremità del diametro verticale di un cerchio, saranno percorse da un grave in tempi eguali [1].

[1] È indifferente che il punto di convergenza sia nell' estremità superiore o nell' inferiore del diametro verticale AG ; imperocchè,

219. All' idea di *sincrona* i geometri comunemente aggiungono quella di tempo minimo; e perciò la serie delle curve dev' esser quella di altrettante cicloidi. In tal caso si avrà l' equazione della sincrona eliminando il raggio a del circolo generatore della cicloide tra l' equazione di questa curva

$$(8) \qquad y = a.\text{arc cos}\,\frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$$

e l' equaziono (6) del n° 114

$$(9) \qquad \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\text{arco cos}\,\frac{a-x}{a}\ .$$

Ma senza procedere a questa eliminazione, potremo nel seguente modo costruire la curva per punti. Fatto il raggio $Bo = a$ (*fig. 116*), $Bm = x$, $AG = h$ e condotta la orizzontale mn, si avrà

$$\text{arco}Bn = a.\text{arco cos}\,\frac{a-x}{a}\ .$$

Ma dall' equazione (9) si ottiene

$$a.\text{arco cos}\,\frac{a-x}{a} = \sqrt{2ha}\ ;$$

sarà dunque

$$\text{arco}Bn = \sqrt{2ha}\ ,$$

ossia che l' arco Bn sarà medio proporzionale tra il diametro $2a$ del cerchio generatore e l' altezza $AB = h$. Definito così il punto n sulla semicirconferenza BnE, la orizzontale mn darà nell' intersezione m'' colla cicloide AE un punto della sincrona richiesta.

condotte le Gm'' e Gm' rispettivamente parallele ad An ed As, tanto queste che le loro parallele saranno in tempi eguali percorse da un grave, perchè sono tra esse eguali ed egualmente inclinate all' orizzontale AB.

Questa curva gode della notevole proprietà d' incontrare tutte le cicloidi ad angolo retto. Per dimostrare facilmente questo teorema osserviamo che la x di ogni punto della curva dipendendo dal diametro $2a$ del circolo generatore della cicloide che essa incontra, potremo considerare a come una funzione di x definita dall' equazione (9). E differenziando sotto questa veduta l' equazione (8), dopo avervi sostituito $\sqrt{2ha}$ ad $a.\text{arco}\cos\frac{a-x}{a}$, avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}+\left[\sqrt{\frac{h}{2a}}-\frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right]\frac{da}{dx}.$$

Or dall' equazione (9) facilmente si ottiene

$$\left[\sqrt{\frac{h}{2a}}-\frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right]\frac{da}{dx}=-\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

quindi sostituendo avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

E questo radicale esprimerà la tangente trigonometrica dell' angolo che la tangente alla sincrona farà coll' asse delle x. Ma dall' equazione della cicloide abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2a-x}};$$

e dalla moltiplicazione di queste due derivate risultando il prodotto -1, è chiaro che le due curve s' intersecano ad angolo retto.

220. Passiamo a considerare il moto di un punto materiale obbligato a rimanere sopra una superficie data. Se alla pressione che questa ne soffre sostituiamo una forza eguale ed opposta, potremo riguardare il punto come perfet-

tamente libero ; e così otterremo le stesse equazioni (1) del n° 204. Nelle quali sostituendo a $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ i loro valori dedotti dall' equazione della superficie data

$$f(x, y, z) = 0 ,$$

e che, ponendo $V = \left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$, saranno espressi da

$$V\frac{df}{dx},\ V\frac{df}{dy},\ V\frac{df}{dz},$$

avremo le tre equazioni del moto del punto sulla superficie

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X - PV\frac{df}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - PV\frac{df}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - PV\frac{df}{dz} . \end{aligned}$$

E da queste eliminando PV, si avranno due equazioni tra x, y, z, t le quali unite all' equazione della superficie data serviranno a far determinare x, y, z in funzione di t.

La pressione fatta dal mobile nei punti della superficie che ne segneranno il cammino, sarà risultante della forza centrifuga agente nel piano osculatore della curva e della componente delle forze acceleratrici secondo la perpendicolare alla tangente la traiettoria nel punto occupato dal mobile. Rappresenti MS (*fig. 118*) l' intersezione della superficie col piano normale all' elemento di traiettoria proiettato in C; sia NN' la normale alla superficie, Q la componente delle forze acceleratrici nel senso perpendicolare alla tangente ed inclinata alla normale sotto l' angolo ψ, ed LC la direzione del piano osculatore dell' elemento C e che faccia colla stessa normale un angolo θ. Or dovendo secondo questa li-

nea esser diretta la pressione P, risultante di Q e della forza centrifuga $\frac{v^2}{\rho}$ giacente nel piano osculatore della traiettoria, avremo

$$\frac{v^2}{\rho} : Q = \operatorname{sen}\psi : \operatorname{sen}\theta.$$

Quindi se poniamo $Q = 0$, sarà $\theta = 0$; vale a dire che il piano osculatore della traiettoria si confonderà col piano normale alla superficie, e l' arco compreso tra due punti qualunque della curva sarà un massimo od un minimo. Or si avrà $Q = 0$, o quando il mobile non sia sottoposto a veruna forza acceleratrice, o quando ne abbia nella sola direzione tangenziale alla traiettoria; del qual secondo caso ne porge esempio la resistenza dei mezzi, o quella incontrata nell' attrito.

221. Applicando le equazioni (10) alla ricerca del moto dei gravi pei piani inclinati, l' equazione generale del piano

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

ci darà

$$\frac{df}{dx} = A, \quad \frac{df}{dy} = B, \quad \frac{df}{dz} = C.$$

Donde, mercè l' eliminazione di PV dalle equazioni (10) dopo avervi messo $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = -g$, risulteranno le due

$$B\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$C\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{d^2z}{dt^2} - Ag;$$

le quali integrate nell' ipotesi che il grave non abbia velocità iniziale, ci daranno

$$Bx = Ay + C'$$
$$Cx = Az - \tfrac{1}{2}gt^2 + C''.$$

E chiamando x', y', z' le coordinate del punto di partenza del grave, sarà

$$C' = Bx' - Ay' \quad \text{e} \quad C'' = Cx' - Az' ;$$

quindi le due equazioni precedenti diverranno

$$(11) \qquad y-y' = \frac{B}{A}(x-x'), \quad \frac{gt^2}{2C} = \frac{z-z'}{C} - \frac{x-x'}{A}.$$

Or deducendo dall' equazione del piano quella della sua intersezione col piano xy, avremo

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}.$$

Dunque la prima delle equazioni (11), che disegna la proiezione della traiettoria sul piano xy, indica una retta perpendicolare a quella intersezione; e perciò la traiettoria del grave sul piano inclinato si confonderà colla linea di massimo pendio. La seconda poi delle equazioni (11), sostituendovi a $\frac{z-z'}{C}$ il suo valore $\frac{A^2+C^2}{AC}(x-x')$ tratto dall'equazione della traccia del piano, diverrà

$$(12) \qquad \frac{gt^2}{2} = -\frac{A^2+C^2}{AC}(x-x').$$

Or chiamando α l' angolo che la traccia del piano su quello delle zx forma coll' asse delle x, avremo $\frac{A}{C} = \tang\alpha$ e $\frac{C}{A} = \cot\alpha$; in conseguenza sarà

$$-\frac{A^2+C^2}{AC} = \frac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}.$$

E questo valore sostituito nell' equazione (12) ci darà

$$\tfrac{1}{2}g\,\text{sen}\alpha t^2 = \frac{x-x'}{\cos\alpha}.$$

Ma $\frac{x-x'}{\cos\alpha}$ è la proiezione sul piano delle zx del cammino percorso dal grave nel tempo t, e $g\text{sen}\alpha$ è la componente della gravità parallelamente alla stessa proiezione; dunque il moto dei gravi pei piani inclinati è uniformemente accelerato non altrimenti che quello per discesa verticale. È soltanto più lento, perchè la forza acceleratrice ne viene diminuita nella ragione che al raggio trigonometrico tiene il seno dell' angolo d' inclinazione del piano all' orizzonte.

222. Applichiamo ancora le stesse equazioni (10) al moto di un grave costretto a rimanere sulla superficie di una sfera. Supponendo l' origine nel centro e le z positive nel senso della gravità, dall' equazione della superficie sferica

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0 \tag{13}$$

avremo

$$V=\frac{1}{a}, \quad \frac{df}{dx}=x, \quad \frac{df}{dy}=y, \quad \frac{df}{dz}=z.$$

Daltronde pel dato del problema abbiamo

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=g.$$

Quindi le equazioni (10) diverranno

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -P\frac{x}{a} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -P\frac{y}{a} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -P\frac{z}{a}. \end{aligned} \tag{14}$$

Or moltiplicando la 1ª per y, la 2ª per x, indi sottraendo l' una dall' altra, avremo

$$\frac{yd^2x-xd^2y}{dt^2}=0;$$

donde

$$ydx - xdy = cdt. \tag{15}$$

La proiezione del moto del punto sul piano delle xy soddisfa dunque al principio delle aie (n° 191). Ed in vero, dovendo l' asse delle z esser sempre incontrato dalla risultante delle forze P e g, la proiezione di questa risultante sul piano xy passerà costantemente pel centro della sfera; in conseguenza la proiezione del raggio vettore sullo stesso piano dovrà necessariamente descrivere aie proporzionali ai tempi.

Se inoltre addizioniamo le equazioni (12), dopo averle ordinatamente moltiplicate per $2dx$, $2dy$, $2dz$, avremo

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gdz - 2P\left[\frac{x}{a}dx + \frac{y}{a}dy + \frac{z}{a}dz.\right]$$

Ma $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ rappresentano i coseni degli angoli che la normale forma cogli assi, e quelli che la tangente alla traiettoria fa coi medesimi assi hanno i loro coseni rispettivamente espressi da $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; dunque il trinomio fattore di 2P sarà nullo, perchè proporzionale al coseno di 90°. In conseguenza l' equazione precedente diverrà

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gdz;$$

donde

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = 2gz+c', \tag{16}$$

la costante c' dipendendo dalla posizione e celerità iniziale del grave.

Le equazioni (13) (15) e (16) bastano alla compiuta determinazione del moto. Imperocchè differenziando l' equazio-

ne (15) avremo

$$xdx + ydy = - zdz.$$

Indi eleveremo questa e l'equazione (15) a quadrato, e dalla loro addizione risulterà

$$(y^2 + x^2)(dy^2 + dx^2) = z^2dz^2 + c^2dt^2.$$

Nella quale sostituendo il valore di $y^2 + x^2$ tratto dall'equazione (13) e quello di $dx^2 + dy^2$ dato dall'equazione (16) risulterà

$$(17) \qquad dt = \frac{\pm adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(c' + 2gz) - c^2}},$$

serbando il segno + per la salita del grave, poichè allora le variazioni simultanee di z e t procederanno nello stesso, ed il segno — per la discesa, che indurrà contrarie variazioni in z e t.

Or quando l'equazione (17) sia integrata, essa prenderà la forma $t = f(z)$, donde potrà dedursi $z = f_1(t)$, che ci darà il valore dell'ordinata z in funzione del tempo. Per ottener poi i valori delle altre due coordinate in funzione della stessa variabile indipendente, chiamiamo ψ l'angolo che la proiezione $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ del raggio vettore a sul piano delle xy forma coll'asse delle x; e l'equazione (15) darà

$$r^2d\psi = (a^2 - z^2)d\psi = cdt,$$

donde

$$(18) \qquad d\psi = \frac{cdt}{a^2 - z^2} = \frac{acdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(c' + 2gz) - c^2}}.$$

L'integrale di questa equazione darà ψ in funzione di z; e poichè avremo già ottenuto z in funzione di t; quindi sarà anche nota la funzione di t che dovrà esprimere il valore di ψ, e così verranno determinate per mezzo di t le due

altre coordinate

$$x = r\cos\psi\ ,\ y = r.\mathrm{sen}\,\psi.$$

223. Da quel che finora si è detto si rileva che le equazioni (13), (15) e (16) basteranno alla determinazione del moto del grave, quando sia definita la costante c. A tal uopo immaginiamo condotto pel centro della sfera e pel punto di partenza del grave un piano verticale, la cui normale farà un angolo α colla direzione della velocità iniziale v_1 che sarà sempre tangente alla sfera. La componente orizzontale di questa velocità, vale a dire la velocità con cui l'estremità libera di r scorrerà sul piano xy nell'origine del tempo, sarà espressa da $v_1\cos\alpha$. Avremo così l' equazione

$$\frac{rd\psi}{dt} = v_1\cos\alpha\ ,$$

nella quale sostituendo a $\frac{d\psi}{dt}$ il suo valore tratto dall' equazione (18), e dinotando un z_1 il valore iniziale di z, risulterà.

$$c = v_1\sqrt{a - z_1^{\,2}}.\cos\alpha.$$

Or se la velocità iniziale fosse nulla, avremmo $v_1 = 0$; se avendo un valore finito, fosse diretta nel piano verticale condotto pel centro della sfera e pel punto di partenza del grave, sarebbe $\cos\alpha = 0$. Quindi si nell' uno che nell'altro caso sarà $c = 0$; l' equazione (18) darà $d\psi = 0$, quindi $\psi = costante$; e l' equazione (13) divenendo

$$ydx - xdy = 0\ ,$$

darà

$$y = mx.$$

Così la traiettoria, proiettandosi sul piano xy secondo una retta che passa pel centro della sfera, si confonderà colla circonferenza del cerchio massimo verticale condotto pel punto di partenza del grave.

224. Mercè le stesse equazioni (10) potremo in funzione di t determinare la velocità v e la forza normale P da sostituirsi alla resistenza della superficie sferica. Rispetto a v abbiamo dall'equazione (16)

$$v^2 = 2gz + c',$$

per la quale, dinotando con v_1 e z_1 i valori iniziali di v e z, sarà

$$c' = v_1^2 - 2gz_1 ;$$

quindi

$$v^2 - v_1^2 = 2g(z - z_1) ,$$

e troviamo così riprodotto il teorema del n° 171.

Ottenuto il valore di v in funzione di z e quindi di t; sarà facile avere quello di P. Imperocchè addizionando le equazioni (10) dopo averle ordinatamente moltiplicate per x, y, z avremo

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = gz - Pa.$$

In vece del trinomio, numeratore del 1° membro, poniamo il valore che ce ne dà l'equazione

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds^2$$

che risulta da quella della sfera differenziata due volte, ed otterremo

$$-v^2 = gz - Pa ,$$

donde

$$P = \frac{v^2 + gz}{a} ;$$

valore che sarà positivo, negativo o nullo a norma di quello del binomio $v^2 + gz$. E per ben dichiarare queste diverse fasi del valore di P, rammentiamo che questa forza è risultante della forza centrifuga agente nel piano osculatore

della curva e della componente di g secondo la perpendicolare alla tangente ; sarà dunque P la somma algebrica delle proiezioni della forza centrifuga e della gravità sul raggio della sfera. Riguardando come positiva la proiezione che cade sul raggio e negativa quella che va sul prolungamento di esso , disegni ρ il raggio di curvatura della traiettoria ; $\frac{v^2}{\rho}$ esprimerà la forza centrifuga , e $\frac{v^2}{\rho} \cdot \frac{\rho}{a} = \frac{v^2}{a}$ ne sarà la proiezione sul raggio della sfera ; la quale proiezione cadendo sempre sul prolungamento del raggio sarà negativa, e perciò $\frac{v^2}{a}$ sarà la forza che dovrà equilibrarla.

La proiezione poi $\frac{gz}{a}$ della gravità g avrà segno opposto a quello di z , poichè cadrà fuori o dentro della sfera secondochè z sarà positiva o negativa ; quindi la forza che dovrà tenerla in equilibrio dovrà avere lo stesso segno di z. Or addizionando i valori delle due proiezioni avremo , come sopra

$$P = \frac{v^2 + gz}{a}.$$

Ma essendo z negativa per tutti i punti della superficie sferica superiore al piano xy, per essi punti il numeratore del valore di P esprimerà una differenza , la quale finchè sarà positiva, indicherà che la forza da sostituirsi alla resistenza della superficie dovrà esser diretta da fuori in dentro ; la stessa forza sarà nulla ed il moto del punto sarà indipendente dalla resistenza della superficie, quando si avrà $v^2 = gz$; e finalmente P sarà diretta da dentro in fuori dal momento che sarà $v^2 < gz$. Rispetto poi ai punti della traiettoria giacenti sulla superficie sferica inferiore al piano xy, P andrà sempre diretta da fuori in dentro , perchè il valore costantemente positivo di z fa che i due termini del binomio $v^2 + gz$ siano uniti per addizione aritmetica.

225. L' idea di un grave , che nel suo moto fosse co-

stretto a rimanere sopra una data superficie sferica, sarebbe attuata in un pendolo semplice che allontanato dalla verticale per un angolo α, ricevesse una spinta perpendicolare al suo piano di oscillazione nel medesimo istante in cui fosse abbandonato a se stesso. Chiamando θ l' angolo variabile che la direzione del pendolo farà colla verticale del punto di sospensione, supporremo gli angoli α e θ abbastanza piccoli perchè nelle serie che ne rappresentano i coseni si possano trascurare i termini di grado superiore al 2°. Così avremo

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

quindi

$$z = a\cos\theta = a - \frac{a\theta^2}{2}, \quad dz = -a\theta d\theta, \quad a^2 - z^2 = a^2\theta^2,$$

$$z_1 = a\cos\alpha = a - \frac{a\alpha^2}{2}, \quad c^2 = v_1^2 - 2gz_1 = v_1^2 - 2ga + ga\alpha^2;$$

e l' angolo ε della celerità impressa colla posizione iniziale del piano di oscillazione essendo nullo, avremo

$$c^2 = v_1^2(a - z_1^2)\cos^2\varepsilon = v_1^2 a^2 \alpha^2.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (17) dopo aver fatto $\frac{v_1^2}{ga} = \gamma^2$, si avrà

$$(19) \qquad dt = \mp \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - \theta^2)(\theta^2 - \gamma^2)}}$$

che può facilmente ridursi alla forma

$$dt = \mp 2\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)^2 - (2\theta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)^2}}.$$

Ma ponendo

$$(20) \qquad 2\theta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = (\alpha^2 - \gamma^2)x,$$

si avrà

$$\theta d\theta = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \gamma^2)dx ;$$

quindi

$$dt = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \text{ arcocos} x \text{ , ed } x = \cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}} .$$

E sostituendo in quest' ultima equazione il valore di x che risulta dall' equazione (20) avremo

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2+\gamma^2}{2} + \frac{\alpha^2-\gamma^2}{2} \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$(21) \qquad = \alpha^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + \gamma^2 \text{sen}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} .$$

Perciò dando alternativamente a $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ i valori $0°$ e $\frac{1}{2}\pi$, π e $\frac{3}{2}\pi$ ec. si avrà una volta $\theta = \pm\alpha$, e l'altra $\theta = \pm\gamma$. Il valore di θ è dunque periodico come si poteva ancora rilevare dalla natura della funzione che lo rappresenta; e la durata del periodo è data da $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In conseguenza il piano di oscillazione del pendolo roterà intorno alla verticale del punto di sospensione; ed un osservatore che ne fosse trasportato, vedrebbe il pendolo oscillare da un solo lato della verticale tra due rette a questa inclinate sotto gli angoli α e γ. La durata di una tal relativa oscillazione sarebbe misurata dal tempo necessario a far passare θ dal valore α al valore γ, vale a dire da $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; e nell' istante medio di questa durata, ossia al termine del tempo $t\sqrt{\frac{a}{g}}$, ei avrebbe $\theta = \sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}}$, valore più grande

della media aritmetica $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ [1]; dunque nell'istante medio di un'oscillazione relativa il filo di sospenzione del pendolo non dividerà per mezzo l'arco di escursione $\alpha-\gamma$.

Il pendolo descrivendo una superficie conica intorno alla verticale del punto di sorpensione, chiamiamo ψ l'angolo variabile che il piano di oscillazione farà colla sua giacitura iniziale. E questo moto di rotazione essendo identico a quello che contemporaneamente verrà eseguito dalla proiezione del pendolo sul piano delle xy, avremo tra ψ e t la relazione.

$$r^2 d\psi = c dt.$$

Nella quale sostituendo ad r^2 e c i valori $\alpha^2\theta^2$ ed $a\alpha\gamma\sqrt{ga}$ che li rappresentano nell'ipotesi di α e θ abbastanza piccoli per esserne trascurabili le potenze superiori alla 2^a, risulterà

$$d\psi = \frac{\alpha\gamma}{\theta^2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,dt.$$

Or dall'equazione (19) si rileva che ponendo $\gamma=\alpha$, sarà costantemente $\theta=\alpha$; quindi la relazione tra ψ e t diverrà

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}}\,dt;$$

[1] Sull'ipotenusa di un triangolo rettangelo, di cui α e γ siano cateti, si descriva una semicirconferenza, e se ne cerchi il punto, al quale condotte due corde dall'estremità del diametro, la loro somma sia un massimo. Mercè le note regole del calcolo differenziale si troverà quel punto giacere sulla perpendicolare elevata dal centro; e la somma massima sarà espressa da $2\sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}}$. Sarà dunque $2\sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}}>\alpha+\gamma$; ed in conseguenza $\sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}}>\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

donde

$$\psi = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

Nell' ipotesi dunque di $\gamma = \alpha$ il pendolo descriverebbe intorno alla verticale del punto di sospensione e con moto uniforme la superficie di un cono retto a base circolare. Ma se indipendentemente da questa speciale condizione sostituiamo nell' espressione di $d\psi$ a θ^2 il valore che ne dà l' equazione (21), avremo

$$(22) \qquad d\psi = \alpha\gamma\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{dt}{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}\,;$$

e poichè, dividendo per $\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}$ i termini dell' ultima frazione, risulta

$$\frac{dt}{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + \gamma^2\operatorname{sen}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}} = \frac{\frac{dt}{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}}{1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}{\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}} = \frac{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}}{\frac{1}{\alpha^2}\left[\alpha^2 + \gamma^2 \operatorname{tang}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d.\operatorname{tang} t\sqrt{\frac{g}{a}}}{\alpha^2 + \gamma^2\operatorname{tang}^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

sarà, ponendo $\operatorname{tang} t\sqrt{\frac{g}{a}} = v$,

$$d\psi = \frac{\alpha\gamma\, dv}{\alpha^2 + \gamma^2 v^2}.$$

Integrando avremo

$$\psi = \operatorname{arco\,tang} \frac{\gamma v}{\alpha}\,,$$

donde

$$(23)\qquad \tang\psi = \frac{\gamma v}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}\tang t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Laonde gli angoli ψ e $t\sqrt{\frac{a}{g}}$ coincideranno nei punti estremi dei quattro quadrati. E perciò il valore $t=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, che fa $\theta=\gamma$, corrisponderà a $\psi=90°$; sara poi $\psi=180°$, quando $t=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ renderà $\theta=\alpha$; indi ritornerà $\theta=\gamma$, allorchè $\psi=270°$; ed in fine avremo nuovamente $\theta=\alpha$ nel momento che sarà $\psi=360°$. In conseguenza durante un' intera oscillazione conica il pendolo compirà quattro oscillazioni relative al suo piano.

Il valore $t=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ che corrisponde a $\psi=180°$, è costante qualunque sia il punto della traiettoria da cui si cominci a contare una rotazione per due angoli retti. Imperocchè, se dopo il tempo t il piano di oscillazione sia inclinato alla sua giacitura iniziale di un angolo ψ, bisognerà un tempo $t+x$ perchè l' inclinazione divenga $\psi+180°$. Or dall' equazione

$$\tang(\psi+180°) = \frac{\gamma}{\alpha}\tang(t+x)\sqrt{\frac{g}{a}}$$

si dedurrà facilmente l' altra

$$\left[1+\tang^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]\tang x\sqrt{\frac{g}{a}} = 0;$$

la quale non potendo esser soddisfatta, se non ponendo $x=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, ci dimostra chiaramente che il tempo impiegato dal piano di oscillazione per andare da ψ a $\psi+180°$

è lo stesso che quello richiesto per compiere il moto da 0° a 180°.

Per ottenere poi la legge secondo cui varierà la lunghezza della proiezione del pendolo sul piano xy, ritorniamo all'equazione

$$r^2 d\psi = c dt = a\alpha v_1 dt,$$

nella quale sostituendo a $\frac{dt}{d\psi}$ il valore dato dall'equazione (22) ed a v_1 il suo valore $\gamma\sqrt{ga}$, avremo

$$r^2 = a^2 \left[\alpha^2 \cos t \sqrt{\frac{g}{a}} + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}\right];$$

dalla quale eliminando t mercè l'equazione (23), risulterà

$$(24) \qquad r^2 = \frac{a^2\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2\psi + \gamma^2 \cos^2\psi},$$

che sarà l'equazione della proiezione della traiettoria sul piano delle xy. Nella quale chiaramente si scorge l'equazione polare di un'ellissi riferita al centro; ma potremo averne facilmente la traduzione in coordinate rettangolari ponendo in vece $sen\psi$ e $cos\psi$ i valori che ci danno le equazioni

$$(25) \qquad x = r.\cos\psi, \quad y = r.\operatorname{sen}\psi;$$

ciò che darà

$$\alpha^2 x^2 + \gamma^2 y = a^2\alpha^2\gamma^2.$$

Quindi $a\gamma$ ed $a\alpha$ saranno i due semiassi della curva.

Volendo in fine ottenere x ed y in funzione di t, bisognerà sostituire nelle equazioni (25) il valore di r dato dall'equazione (24) e quelli di $sen\psi$ e $cos\psi$ che si otterranno dall'equazione (22). Si avrà così

$$x = a\alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad y = a\gamma \operatorname{sen} t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Ed è degno di nota che x è indipendente da γ e quindi dalla velocità impressa, come y lo è dall' angolo α. Ciò vuol dire che il pendolo si muove parallelamente all' asse delle x, come se ninna velocità gli fosse stata impressa; e che il moto secondo l' asse delle y non ha veruna relazione coll' angolo di deviamento α. Tutto ciò deriva necessariamente dalla mutua indipendenza delle azioni delle forze; ed in virtù della quale indipendenza si avrà sempre la stessa determinazione pel luogo del pendolo, siano simultanee le azioni della gravità e della velocità impressa, siano successive. Quindi avviene ancora che il tempo necessario a far ritornare il pendolo alla posizione iniziale è indipendente dall' esistenza della velocità impressa; imperocchè facendo $\psi = 360°$, l'equazione (22) ci dà $t\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\pi$, donde $t = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; valore identico a quello che si sarebbe ottenuto ponendo $\gamma = 0$.

CAPO SESTO.

Del moto di rotazione considerato nei suoi fenomeni.

Definizione della celerità angolare — Modo di rappresentarne il valore e la direzione per mezzo di rette — Celerità risultante di più rotazioni intorno ad un medesimo asse — Composizione delle rotazioni ad assi paralleli: *coppia* di rotazioni — Parallelogrammo delle rotazioni — Riduzione di quante rotazioni si vogliano e comunque ne siano diretti gli assi, ad una sola rotazione ed una coppia — Immagine di questo moto in quello di una vite nella sua madrevite — Asse istantaneo nella rotazione di un corpo intorno ad un punto fisso. Questo moto è sempre riducibile a quello di un cono fisso al corpo e che si aggira sulla superficie di un altro cono fisso nello spazio — Funzioni che ligano le diverse quantità che si possono considerare in questa specie di moto — Idea di ogni possibile moto di un corpo perfettamente libero — Riduzione di ogni possibile moto di un corpo a moto per elica, e quindi a rotazioni intorno a differenti assi.

226. Nei capi precedenti abbiamo esaminato le leggi del moto di traslazione; e quantunque avessimo supposto il mobile ridotto alla piccolezza dell' atomo, purtuttavia le formole, che ne abbiamo ottenuto, sono applicabili a qualsivoglia corpo, quando nell' espressione della forza s' introduca la massa del mobile come fattore della velocità.

Ma se nell' atomo non è possibile che il solo moto di traslazione, in un corpo poi un moto di rotazione si può unire al primo, o esistervi solo; quindi è che facendoci ad esaminare questa seconda specie di moto, dovremo necessariamente considerarla in un mobile che abbia dimensioni finite.

227. Immaginando un corpo rotante intorno ad un asse immobile, è chiaro che tutti i punti della sua massa descriveranno altrettanti archi circolari simili tra loro; perciò chiamando ω l' arco descritto nell' unità di tempo dall' atomo che dista dall' asse di rotazione di una quantità eguale all' uni-

tà lineare, l'atomo che ne sarà lontano della quantità r, descriverà l'arco $r\omega$. E poichè l'arco ω disegna la grandezza dell'angolo descritto da un piano che fisso al corpo fosse condotto per l'asse di rotazione, esso ha ricevuto il nome di *celerità angolare*; la quale misura la grandezza della rotazione, non altrimenti che lo spazio percorso nell'unità di tempo rappresenta la quantità della traslazione.

Se la rotazione è uniforme, e ψ disegna l'arco descritto col raggio 1 nel tempo t, avremo

$$\omega = \frac{\psi}{t};$$

e così la celerità angolare, analogamente a quella di traslazione, è data dal rapporto dell'arco al tempo. Nel caso poi di una rotazione varia, dovendosi pei principii del calcolo infinitesimale riguardare come uniforme il moto per l'arco $d\psi$ nel tempo dt, sarà

$$\omega = \frac{d\psi}{dt}.$$

E questa espressione, poichè conviene ancora alla rotazione uniforme, dovrà ritenersi come la vera definizione algoritmica della celerità angolare; osservando però che $\frac{d\psi}{dt}$ avrà un valore costante nella rotazione uniforme, e sarà in vece una funzione di t nella rotazione varia.

228. Le grandezze e direzioni delle celerità angolari, non altrimenti che quelle delle forze, possono essere rappresentate per mezzo di linee. Sulla retta indefinita X'X *(fig. 119)* che supponiamo essere un asse di rotazione, si prenda un punto A come origine, e fingiamo che un osservatore, guardando lungo la retta, debba vedere il moto procedere costantemente da sinistra a destra: è chiaro ch'egli dovrà guardare nella direzione XA, ovvero nell'opposta X'A, secondochè la rotazione procederà a norma della freccia f o del-

l'altra f'. Nel primo caso il senso della rotazione sarà di-segnato da AX, nel secondo da AX'; e prendendo su questa linea indefinita la parte Am, ovvero Am', proporzionale alla grandezza della corrispondente celerità angolare, potremo con una stessa retta rappresentare sì la quantità che la direzione del moto rotatorio.

229. Premesse queste definizioni, supponiamo che un corpo sia spinto da due rotazioni cospiranti Am, An *(fig. 120)* intorno lo stesso asse X'X. Immaginiamo che per questo asse sia condotto un piano segante il corpo, e nella sezione consideriamo un punto qualunque s, la cui distanza sh dall'asse di rotazione sia rappresentata da y. Mercè la celerità angolare $Am = p$ il punto s tenderà di elevarsi sul piano della sezione colla celerità py, e per effetto della celerità angolare $An = q$ lo stesso punto vorrà elevarsi colla velocità qy. Dunque nel medesimo istante saranno comunicate al punto s le due velocità cospiranti py e qy, le quali componendosi nella somma

$$py + qy = (p + q)y,$$

faranno che il punto s acquisti la celerità angolare $p + q$.

Se le due celerità angolari simultanee fossero opposte, come Am ed An', allora il punto s mentre tenderebbe di elevarsi sul piano della sezione colla velocità py, sarebbe spinto ad abbassarsi colla velocità qy. Il suo moto avrebbe dunque la velocità

$$py - qy = (p - q)y;$$

vale a dire che avrebbe la celerità angolare $p - q$.

Dunque: *due rotazioni simultanee intorno ad un medesimo asse si comporranno in una sola, la cui celerità angolare pareggerà la somma algebrica delle velocità componenti.*

230. Poniamo in secondo luogo che un medesimo corpo sia spinto a due rotazioni simultanee, aventi le celerità an-

golari p e q, intorno agli assi AB, AD (*fig. 121*) che s'incontrano nel punto A. Da un punto qualunque m giacente sul piano dell'angolo BAD conducendo agli assi le perpendicolari $mn = x$, $mg = y$, è evidente che quel punto mercè la rotazione intorno all'asse AB tenderà di elevarsi sul piano colla velocità px, e dalla rotazione intorno ad AD sarà spinto colla velocità qy; avrà dunque la velocità $px + qy$. Ma per un noto teorema di Geometria abbiamo che completando il parallelogrammo ABCD, ed abbassando la perpendicolare $ms = h$ sulla diagonale AC $= \theta$, sarà

$$px + qy = \theta h;$$

vale a dire che le due rotazioni simultanee intorno agli assi, AB, AD equivalgono ad una sola rotazione intorno all'asse AC e con una celerità angolare $= \theta$. E poichè due rotazioni diverse, egualmente che due diversi moti di traslazione non possono coesistere nel medesimo corpo, così le due tendenze a rotare intorno agli assi AB ed AD produrranno una rotazione reale intorno all'asse AC. Imperocchè abbassando da un punto qualunque o della diagonale AC le due perpendicolari $ot = m$, $ov = n$ sui due lati contigui AB $= p$, AD $= q$, e chiamando α e β gli angoli BAC, BCA, avremo

$$p : q = \text{sen}\beta : \text{sen}\alpha = \frac{m}{\text{A}o} : \frac{n}{\text{A}o};$$

donde

$$pn = qm.$$

Ma il punto o è spinto dalla rotazione intorno AB a discendere sotto il piano dell'angolo ABD colla velocità pn, mentre la rotazione intorno all'asse AD lo spinge a sollevarsi colla velocità qm; tutti i punti dunque della diagonale resteranno immobili, ed essa costituirà l'asse dell'effettiva rotazione.

Laonde: *due tendenze a simultanea rotazione intorno*

a due assi concorrenti in un punto , si comporranno in un' effettiva rotazione rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette che rappresentano le grandezze e direzioni delle rotazioni componenti.

231. Supponiamo ancora che gli assi delle rotazioni simultanee siano paralleli tra loro, come Ap e Bq (*fig. 122*). Per un punto qualunque m , preso sul piano degli assi, conduciamo ad essi la perpendicolare mAB ; e facciamo $m\mathrm{A} = x$, $m\mathrm{B} = y$. Essendo le due rotazioni simultanee dirette nel medesimo senso , si eleverà il punto m sul piano degli assi con una velocità eguale alla somma

$$px + qy ,$$

p e q rappresentando le celerità angolari intorno agli assi Ap e Aq. E se a questi conduciamo la parallela Cθ alla distanza $m\mathrm{C} = h$, tale che soddisfaccia la proporzione

$$h - x : y - h = q : p ,$$

vale a dire che divida la distanza AB degli assi in parti reciprocamente proporzionali alle celerità p e q, avremo

$$px + qy = (p + q)h.$$

Dunque : *due rotazioni simultanee intorno ad assi paralleli e dirette nel medesimo senso , si comporranno in una rotazione unica intorno ad un asse parallelo ai primi , e che dividerà la loro distanza in parti reciprocamente proporzionali alle intensità delle rispettive celerità angolari.* Ed in vero tutti i punti della Cθ dovranno rimanere immobili sotto l' azione opposta delle due velocità eguali $p(h-x)$ e $q(y-h)$.

Se poi, essendo tuttavia gli assi paralleli , le rotazioni fossero dirette in senso contrario , come indica la *fig. 123*; allora (ponendo $m\mathrm{A} = x$, $m\mathrm{B} = y$) il punto m sarebbe elevato sul piano degli assi colla velocità px, ed abbassato

invece colla velocità qy. Avrebbe in conseguenza la velocità effettiva $px - qy$, la quale sarà nel senso della celerità p o q, secondochè p sarà più o meno grande di q. Supponendo che sia $p > q$, conduciamo la Cθ parallela agli assi ed a tale distanza mC $= h$ che resti soddisfatta la proporzione

$$y - h : x - h = p : q.$$

Così tutti i punti della Cθ resteranno immobili sotto le velocità eguali ed opposte $q(y-h)$ e $p(x-h)$; Cθ sarà l'asse effettivo di rotazione, ed avremo

$$px - qy = (p - q)h;$$

vale a dire che la rotazione si attuerà intorno l'asse Cθ con una velocità angolare equale alla differenza $p-q$.

Dunque: *se due rotazioni intorno ad assi paralleli vanno dirette in senso contrario, la celerità angolare della rotazione risultante pareggerà la differenza delle celerità componenti, e sarà attuata intorno ad un asse che avrà giacitura analoga alla risultante di due opposte forze parallele.*

202. Essendo (*fig. 123*) $y-h = \mathrm{AC} + \mathrm{AB}$, ed $x-h = \mathrm{AC}$, la proporzione che ci ha dato la posizione dell'asse Cθ, diverrà

$$\mathrm{AC} + \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = p : q;$$

donde

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB}.q}{p-q}.$$

Dunque nel caso di due rotazioni opposte l'asse della rotazione risultante giacerà tanto più lontano da quelli delle rotazioni componenti, come queste si approssimeranno ad essere eguali; e quando sia $p = q$, sarà $\mathrm{AC} = \infty$. Or la circonferenza di raggio infinito essendo identica alla linea retta, è chiaro che due rotazioni eguali ed opposte intorno

ad assi paralleli non produrranno che moto di traslazione; conseguenza rifermata dal valore che nell'ipotesi di $p=q$ assume la celerità angolare della cercata rotazione risultante, poichè avremo

$$px-qy=p(x-y)=p.AB.$$

Il piano degli assi non avrà dunque altro moto che di traslazione, poichè tutti i suoi punti prenderanno una velocità comune misurata dal prodotto della distanza degli assi per una delle celerità componenti.

Una *coppia di rotazioni* può dunque esser girata comunque nel suo piano o trasportata in altro piano parallelo al primo, senza che il moto del sistema ne patisca cangiamento; poichè si avrà sempre una stessa celerità di traslazione, e sempre diretta perpendicolarmente al medesimo piano. Ed oltre al cangiamento di luogo una coppia di rotazioni può essere comunque modificata nel valore delle celerità componenti, purchè rimanga invariato il prodotto di una di esse per la distanza degli assi rispettivi. Or da un identico teorema sulle coppie di forze abbiamo veduto risultarne nella Statica la loro composizione in una sola; potremo dunque comporre ancora in una sola quante coppie di rotazioni si vorranno. La quale operazione ci ricondurrebbe al parallelogrammo delle velocità, poichè le coppie di rotazioni non possono produrre che moto di traslazione.

233. Passiamo ora a determinare la rotazione risultante di quante rotazioni si vogliano, ed attuate intorno ad assi comunque diretti nello spazio.

Sia Ap *(fig. 124)* l'asse di una rotazione componente. Ad un punto qualunque O del sistema, a cui appartiene il punto A, s'intendano applicate due rotazioni opposte p_1 $-p_1$ eguali a p e che si effettuano intorno ad un asse parallelo ad Ap. Equilibrandosi a vicenda le due rotazioni p_1 e $-p_1$, l'effetto della rotazione p sarà identico a quello delle tre

rotazioni p, p_1 e $-p_1$, ossia della rotazione p_1 e della coppia di rotazioni $(p, -p_1)$.

Dunque: *una rotazione può essere ovunque trasportata parallelamente a se stessa, purchè si abbia conto della coppia di rotazioni che ne nasce, ed il cui momento è rappresentato dal prodotto della rotazione data per lo spazio percorso dal suo asse.*

Ciò posto, supponiamo un numero qualunque di rotazioni rappresentate dagli assi Ap, Bq, Cr ecc. Trasportandole tutte parallelamente a loro stesse fino ad intersecare i loro assi in uno stesso punto O del sistema in cui tendono di attuarsi, ne verranno prodotte altrettante coppie di rotazioni, i cui piani e momenti saranno noti, e che potremo comporre in una coppia sola $(\rho, -\rho)$; e similmente comporremo in una sola rotazione θ tutte quelle che parallelamente a loro stesse avremo trasportato nel punto O. Laonde un sistema di quante rotazioni si vogliano e comunque dirette, sarà sempre riducibile ad una sola rotazione θ e ad una sola coppia di rotazioni $(\rho, -\rho)$. Se θ risultasse nulla, la coppia $(\rho, -\rho)$ darebbe al sistema un movimento di traslazione; e se viceversa fosse nulla la coppia, il moto si ridurrebbe ad una rotazione θ definita di quantità e direzione. Quindi il sistema non potrà rimanere in equilibrio, se non siano soddisfatte le due equazioni

$$\theta = 0 \,, \quad (\rho, -\rho) = 0.$$

Essendo definita la posizione del piano di $(\rho, -\rho)$ egualmente che la direzione di θ, sarà noto ancora l'angolo che questa retta farà con quel piano. Ed ove questo angolo non risultasse retto, decomporremmo la coppia $(\rho, -\rho)$ in due altre $(\rho_1, -\rho_1)$ e $(\rho_2, -\rho_2)$, la prima delle quali giacesse in un piano condotto per l'asse θ, e l'altra in un piano perpendicolare a questa retta; indi trasporteremmo la θ parallelamente a se stessa in un altro punto O′ del sistema in modo che la coppia risultante $(\theta, -\theta)$ fosse eguale ed op-

posta a $(\rho_1, -\rho_1)$. Così tutte le possibili rotazioni saranno sempre riducibili ad una sola rotazione θ e ad una coppia di rotazioni $(\rho_2, -\rho_2)$ in un piano perpendicolare all'asse θ; e perciò l'effetto più generale dell'azione simultanea di qualunque numero di rotazioni e comunque dirette, sarà quello d'imprimere al sistema su cui agiscono, un moto di rotazione intorno ad un asse, cootemporaneamente ad un moto di traslazione lungo il medesimo asse. Il moto della vite nella sua madrevite n'è un'immagine fedele.

234. Poichè la facilità di seguire col pensiero la successione dei luoghi occupati da ogni molecola del corpo che rota intorno ad un asse fisso, è la cagione di quella precisa immagine che ne accompagna il concetto della mente; cerchiamo di poter ridurre ad una simile rotazione quella che potrà prendere un corpo girevole intorno ad un punto fisso, affinchè di questa forma più complessa di rotazione potessimo avere un'idea così chiara come quella dell'altra che finora abbiamo considerato.

Togliamo ovunque due punti A e B sulla superficie del corpo mobile intorno ad un punto fisso O, ed immaginiamo congiunti questi tre punti da altrettante rette: avremo così un triangolo ABO, il quale mercè il moto del corpo passerà successivamente da un luogo all'altro dello spazio. E facendoci ad indagare in qual modo il triangolo, che in un certo istante del tempo occupava il luogo ABO, sia passato nell'istante seguente al luogo A'B'O, osserviamo che in questo medesimo luogo sarebbe pervenuto, se girando da prima il piano ABO intorno alla intersezione che ha comune con A'B'O si portassero i due piani a mutuo combaciamento, e che poi intorno ad un asse condotto pel punto O normalmente al piano A'B'O si facesse girare il triangolo ABO fino a confondersi con A'B'O. Or l'effetto di più rotazioni, analogamente a quello di più forze, essendo sempre lo stesso, siano esse successive o simultanee; e queste ultime componendosi sempre (eccetto il caso di una coppia)

in una sola; ne segue che per l'infinitesimo tempo in cui il triangolo è passato dal luogo ABO all'altro A'B'O, il corpo ha realmente rotato intorno ad un asse θ, risultante di quelle due rotazioni che abbiamo veduto atte a riprodurre lo stesso cangiamento di sito.

In un secondo elemento di tempo il triangolo passerà dal luogo A'B'O in un altro prossimo A''B''O; e questo passaggio sarà l'effetto di una seconda rotazione del corpo intorno ad un nuovo asse θ', determinato da due rotazioni simultanee, l'una intorno alla comune intersezione dei piani A'B'O ed A''B''O, e l'altra intorno all'asse che pel punto O va normalmente al piano A''B'O.

In conseguenza ogni possibile moto di un corpo, che può liberamente girare intorno ad un punto fisso, non è che reale rotazione sopra un asse, il quale cangiando luogo da un istante all'altro del tempo, ha ricevuto il nome di *asse istantaneo di rotazione*. E questo continuo cangiar di sito avviene e quanto allo spazio assoluto e quanto al corpo che gira; imperocchè non potremmo immaginare che l'asse istantaneo conservasse il suo luogo nel corpo mentre ne va mutando nello spazio, senza supporre nel corpo una seconda rotazione, la quale componendosi poi colla prima darebbe un asse risultante diverso da quello che si è supposto. Ad un simile risultamento perverremmo ancora, ponendo che il cangiamento di luogo relativo al corpo avvenisse senza mutazione di luogo assoluto nello spazio; dunque l'asse istantaneo deve necessariamente mutar di luogo e nello spazio e nel corpo.

Da ciò poi si rileva che se un corpo rota intorno ad una linea che immobile nel corpo ha moto nello spazio, quella linea non sarà giammai l'asse di reale rotazione; dapoichè se tale ella fosse, non potrebbe rimanere immobile nel corpo senza essere immobile nello spazio. Così l'asse polare della terra, che lentamente rota intorno all'asse dell'ecclittica, non sarà mai quello intorno cui realmente essa gira nel suo moto diurno.

235. Or facciamoci a meglio comprendere l' attuazione di questo doppio movimento, inseparabile dall' asse d' istantanea rotazione. Sia O (*fig.* 125) il punto fisso, e l' asse di rotazione occupando in un certo istante il luogo OI, poniamo che incontrasse la superficie del corpo nel punto α, e che negl'istanti successivi andasse ad incontrarla nei punti b, c, d, e, ecc. Poniamo ancora che durante il tempo infinitesimo pel quale la rotazione si attua intorno all' asse $O\alpha$, il punto b della superficie del corpo sia trasportato nel luogo β dello spazio; che nel secondo elemento di tempo il corpo rotando intorno all' asse $O\beta$, trasporti il punto c della sua superficie in γ; e che in modo analogo i punti d, e, ecc. siano traslocati in δ, ε ecc. A questo modo seguendo col pensiero le successive posizioni che andrà prendendo il corpo col rotare intorno ad un punto fisso, non solo troveremo evidente l' esistenza del doppio moto nell' asse d' istantanea rotazione, ma comprenderemo ancora che il modo di attuazione di questo doppio moto starà sempre nel rivolgimento di un cono, fisso al corpo, sopra un cono immobile nello spazio, entrambi avendo il vertice comune nel centro di rotazione del corpo. È base del cono fisso al corpo il luogo geometrico del polo istantaneo sulla superficie; e la serie dei punti β, γ, δ ecc. immobili nello spazio, e coi quali vengono a combaciare le successive posizioni b, c, d, ecc. del polo istantaneo, costituiscono la base dell'altra superficie conica. Ed egli è chiaro come le forme variabili all' infinito di queste curve direttrici delle due superficie coniche possano definirsi in modo, che rivolgendosi l'una sull'altra superficie venga riprodotto un dato moto del corpo intorno al punto fisso. Potremo dunque rappresentare al nostro pensiero le diverse fasi di ogni possibile movimento di un corpo intorno ad un punto fisso, immaginando un cono fissato al corpo e che rotando porti successivamente gl' infiniti suoi lati a contatto di un altro cono immobile nello spazio. E tutto ciò nell' ipotesi di un continuo cangiamento

di luogo nell'asse istantanco di rotazione; che se poi il cangiamento si attuasse a salti, la rotazione di una piramide fissata al corpo, e che recasse successivamente le sue facce a combaciare con quelle di un'altra piramide immobile nello spazio, ne dipingerebbe l' immagine nel nostro pensiero.

236. In questo concetto di ogni possibile moto di un corpo intorno ad un punto fisso noi avremo a considerare le seguenti cose — Le due curve MN, M'N' che indicheremo con s e σ, disegnando poi con S e Σ le due superficie coniche a cui servono di basi — La celerità angolare θ colla quale il corpo rota intorno all' asse istantaneo OI, e l'altra ω con cui la OI descrive in un medesimo tempo le due superficie S e Σ — Infine i movimenti angolari p e π del polo istantaneo, l' uno intorno all' asse del cono osculatore della superficie S, e l' altro intorno all' asse del cono osculatore di Σ — Or cerchiamo le funzioni che dovranno esprimere le mutue dipendenze di queste diverse quantità.

Immaginando che le due direttrici, s e σ siano intersezioni delle superficie coniche S e Σ con una sfera che ha centro in O ed il raggio $OI = 1$, è chiaro che durante l'infinitesimo tempo dt in cui il polo istantaneo rimane immobile in un punto α, il latercolo ds della curva s per adagiarsi sul latercolo $d\sigma$ della curva σ dovrà descrivere un angolo che sarà somma o differenza degli angoli esterni dei due poligoni sferici infinitilateri, a cui potremo assomigliare le due curve s e σ. Avremo la somma di questi angoli esterni quando le curve opporranno le loro convessità, e ne avremo viceversa la differenza se le due convessità siano girate da un medesimo lato [1]. Or gli angoli esterni dei due poli-

[1] Perchè le curve s e σ avessero opposte le loro convessità, è d' uopo che il cono mobile giri sulla faccia convessa del cono fisso, come avviene ogni volta che θ ed ω hanno lo stesso segno; che se poi queste due celerità angolari andassero dirette in senso contrario, il cono mobile dovrebbe toccare la faccia concava del cono fisso, ed allora s e σ volgerebbero le loro convessità da un

goni s e σ sono rappresentati da $\frac{ds}{r}$ e $\frac{d\sigma}{\rho}$, chiamando r e ρ i raggi di curvatura delle due superficie S e Σ nel punto che si considera ; e poichè la celerità angolare è il quoziente (n° 227) dell' elemento dell'angolo per l' elemento del tempo in cui è stato descritto, avremo la celerità angolare θ del latercolo ds (vale a dire quella del corpo intorno all' asse istantaneo) rappresentata da

$$\theta = \frac{ds}{r.dt} \pm \frac{d\sigma}{\rho dt} \cdot$$

Ma tanto $\frac{ds}{dt}$ che $\frac{d\sigma}{dt}$ rappresenta la celerità ω con cui l'asse istantaneo descrive le due superficie coniche ; quindi sostituendo ω alle due derivate, l'equazione precedente diverrà

$$(1) \qquad \theta = \omega\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}\right).$$

Dunque conoscendo i raggi di curvatura r e ρ ed il movimento angolare ω dell' asse istantaneo, potremo determinare la celerità angolare θ con cui il corpo rota intorno al detto asse.

Abbiamo inoltre che condotti i due raggi di curvatura IP $= r$, IΠ $= \rho$ (*fig. 125*) e congiunti i punti P e Π con O, OP ed OΠ saranno gli assi dei coni osculatori, e le perpendicolari a ed α ad OP ed OΠ saranno i raggi delle loro basi. Perciò avendo fatto OI $= 1$, ed essendo ogni cateto medio proporzionale tra l' intera ipotenusa ed il segmento adiacente, avremo

$$r^2 = \frac{a^2}{1-a^2}, \quad \rho^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},$$

medesimo lato. Di ciò saremo meglio persuasi guardando la figura 126: rappresentando A la base del cono fisso e B o C quella del cono mobile, è chiaro che stando alla convenzione fatta nel n° 228, le celerità θ ed ω dovranno essere egualmente dirette in A e B, ed avere opposte direzioni in A e C.

e questi valori sostituiti nell' equazione (1) ci daranno

$$\theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1-a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Ma $\frac{\omega}{a}$ e $\frac{\omega}{\alpha}$ rappresentano le celerità angolari p e π con cui il polo istantaneo rota intorno agli assi OP ed OΠ dei coni osculatori; quindi l' equazione (1) può ancora assumere la forma

$$\theta = p\sqrt{1-a^2} \pm \pi\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Or sotto questa forma θ rappresenta la diagonale di un parallelogrammo, i cui lati p e π sono ad essa inclinati sotto angoli definiti dai seni a ed α; e poichè questi seni appartengono agli angoli x e ξ che l' asse istantaneo OI forma cogli assi OP ed OΠ dei coni osculatori, ne segue che la celerità angolare θ è risultante delle celerità angolari p e π. Donde poi si deducono i rapporti eguali

$$\theta : p : \pi = \text{sen}(x + \xi) : \text{sen}\xi : \text{sen}x$$

237. Passiamo infine a considerare il moto che può prendere un corpo che sia perfettamente libero nello spazio. Considerandolo in due posizioni immediatamente successive, per le quali un punto del corpo sia passato da O in O' *(fig. 128)* i cangiamenti avvenuti nelle posizioni dei rimanenti punti, quando non siano stati prodotti da semplice traslazione, saranno necessariamente l' effetto di una rotazione attuata intorno ad un certo asse OR convenientemente definito. E poichè questo asse può mutare da un istante all' altro del tempo, egli è chiaro che ogni possibile moto di un corpo perfettamente libero si risolverà sempre in una traslazione congiunta a rotazione.

L'asse istantaneo di tale rotazione e la linea di traslazione del punto che consideriamo, possono essere inclinate sotto un angolo qualunque. Poniamo che questo angolo sia ret-

to, come ROO′ *(fig. 129)*: allora per la retta OR meniamo un piano perpendicolare ad OO′, ed in quella parte del piano in cui la rotazione è opposta alla traslazione del punto O, conduciamo la MN parallela ad OR e che ne disti di tale lunghezza r da rendere soddisfatta l'equazione $r\theta - u = 0$; θ indicando la celerità angolare intorno all'asse istantaneo RO ed u quella di traslazione per la retta OO′. Egli è chiaro che durante l'infinitesimo tempo in cui il punto O passa in O′, mentre una rotazione si attua intorno all'asse OR, la linea MN rimane immobile, ed il moto del corpo non è che semplice rotazione intorno ad essa linea; la quale perciò si distingue col nome di ***asse di spontanea rotazione.***

Se poi OO′ ed OR *(fig. 130)* fossero inclinate ad angolo obbliquo, allora decomponendo la velocità u nelle due v e v', l'una parallela e l'altra perpendicolare ad OR, avremo dalla composizione di v' con θ una semplice rotazione intorno ad un asse parallelo ad OR, mentre v trasporta i punti del corpo secondo linee parallele alla stessa OR. Quindi è che in ogni possibile moto un corpo non farà che rotare e scorrere nel tempo stesso sopra un asse variabile di posizione nello spazio; sarà dunque il suo moto sempre simile a quello di una vite nella corrispondente madrevite, e di cui potesse variare ad ogn'istante la grandezza del passo e la direzione dell'asse. Ed a questa medesima specie di movimento potendosi (n° 233) ridurre quante rotazioni si vogliano, ne segue che mercè semplici rotazioni intorno a differenti assi si potrà sempre riprodurre ogni possibile moto di un corpo.

CAPO SETTIMO.

Dei momenti d' inerzia.

Definizione del momento d' inerzia. Determinazione del momento d' inerzia di un parallelepipedo rettangolare rispetto ad uno dei suoi spigoli; di un' ellissoide rispetto ai diametri principali; e di un solido di rotazione rispetto al suo asse— Cangiamento che avviene nel valore del momento d' inerzia per traslazione dell' asse parallelamente a se stesso. Relazione tra i momenti d' inerzia relativi a due assi paralleli, uno dei quali passi pel centro di gravità del solido. Utilità di questa relazione: applicazione al cilindro ed al parallelepipedo — Dipendenza del momento d'inerzia dalla varia posizione dell' asse intorno ad un punto fisso. In tal caso il luogo geometrico dell' asse di dato momento è una superficie conica di 2° ordine, la quale ha il suo centro nel punto fisso. Riduzione dell' equazione di questa superficie ai suoi diametri principali — Valore del momento d' inerzia di un solido in funzione dei suoi momenti rispetto agli assi principali, e degli angoli che con questi assi farà quello del momento richiesto — Proprietà degli assi principali — Determinazione di essi.

238. Nel capo precedente abbiamo considerato il moto di rotazione nei suoi fenomeni : ci rimane a considerarlo rispetto alle forze che possono produrlo. E poichè in questa disamina incontreremo taluni integrali definiti , la cui determinazione ci obbligherebbe ad interrompere l' esposizione della teorica ; perciò ne facciamo obbietto di questo capo , come di un' introduzione a ciò che resta a dirsi sul moto rotatorio dei corpi.

239. Immaginiamo che ogni elemento della massa di un corpo sia moltiplicato pel quadrato della sua distanza da una retta data, e che di tutti questi prodotti si faccia la somma; la retta, rispetto alla quale si saranno prese le distanze, si nomina *asse*, e la somma dei prodotti dicesi *momento d' inerzia* del corpo rispetto a quel dato asse. Vedremo nel capo seguente la ragione di queste denominazioni.

240. Cerchiamo , per esempio , il momento d' inerzia di

un parallelepipedo rettangolare omogeneo relativamente ad uno dei suoi spigoli a b c. In questi riponiamo gli assi coordinati delle x y z, e nello spigolo c l' asse del momento. Diciamo ρ la densità del corpo ed r la distanza di un elemento dm della sua massa dall'asse delle z: sarà $r^2=x^2+y^2$, $dm=\rho dxdydz$. Quindi il momento del solido rispetto all' asse delle z sarà

$$\int r^2dm=\rho\int\int\int(x^2+y^2)dxdydz=\rho\int\int\int x^2dxdydz+\rho\int\int\int y^2dydxdz.$$

Ma

$$\int\int\int x^2dxdydz=\int_o^a x^2dx\int_o^b dy\int_o^c dz=\tfrac{1}{3}a^3bc,$$

ed

$$\int\int\int y^2dydxdz=\int_o^b y^2dy\int_o^a dx\int_o^c dz=\tfrac{1}{3}ab^3c;$$

sarà dunque

$$\int r^2dm=\tfrac{1}{3}\rho abc(a^2+b^2)=\tfrac{1}{3}\mathrm{M}(a^2+b^2).$$

Similmente avremmo i momenti d' inerzia $\frac{1}{3}\mathrm{M}(b^2+c^2)$, $\frac{1}{3}\mathrm{M}(a^2+c^2)$ dello stesso solido rispetto agli spigoli a e b.

241. Cerchiamo ancora il momento d' inerzia di un'ellissoide omogenea relativamente ad uno degli assi di figura. Nell' equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

che ne rappresenta la superficie, le costanti $2a$, $2b$, $2c$ disegnano i diametri principali con cui coincidono gli assi delle x, y, z. Supponendo che l' asse del momento sia quello delle z, avremo egualmente che pel parallelepipedo

$$\int r^2dm=\rho(\int\int\int x^2dxdydz+\int\int\int y^2dydxdz).$$

Cominciando dal primo di questi integrali, osserviamo che ponendovi x ed y come costanti, z dovrà variare tra i limiti

$$\pm z_1 = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

e che in conseguenza sarà

$$\iiint x^2 dxdydz = \int_{-z_1}^{z_1} dz \iint x^2 dxdy = 2c\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,x^2 dxdy.$$

E se in quest' ultimo integrale riguardiamo ancora x come costante, y varierà tra i limiti

$$\pm y_1 = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

perciò

$$\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,x^2 dxdy = \frac{1}{q}\int_{-y_1}^{y_1} dy\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\int x^2 dx;$$

Or l' integrale rispetto ad y, esprimendo la superficie del semicerchio il cui raggio è $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ha per valore $\frac{\pi b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$; sarà dunque

$$\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,x^2 dxdy = \frac{\pi b}{2}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2 dx = \frac{2}{15}\pi b a^3.$$

Similmente rispetto al 2° integrale che entra nell' espressione di $\int r^2 dm$, e che non differisce dal 1° se non pel cangiamento di x in y, avremo

$$\iiint y^2 dydxdz = \frac{2}{15}\pi a b^3.$$

Quindi

$$\int r^2 dm = \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2+b^2) = M\frac{a^2+b^2}{5}.$$

Nello stesso modo rispetto agli assi $2a$ e $2b$ si avrebbero i momenti d'inerzia

$$\mathrm{M}\frac{b^2+c^2}{5},\ \mathrm{M}\frac{a^2+c^2}{5}.$$

E se fosse $a=b=c$, l'ellissoide diverrebbe una sfera di raggio $=a$, ed il cui momento d'inerzia rispetto ad un diametro qualunque sarebbe $\frac{2}{5}\,\mathrm{M}a^2$.

242. Prendiamo un ultimo esempio nella ricerca del momento d'inerzia di un solido di rotazione rispetto al suo asse, che riguarderemo come quello delle x. Conducendo perpendicolarmente a questo asse due piani infinitamente vicini, determineremo nel solido una falda cilindrica, che avrà l'altezza dx, ed il cui raggio di base sarà l'ordinata y della curva generatrice. Or immaginiamo che sul piano di questa base siano descritti, concentricamente alla circonferenza che la termina, due cerchi coi raggi r ed $r+dr$; ed avremo così una zona circolare espressa da $2\pi rdr$, che servirà di base ad un anello cilindrico, il cui volume essendo $2\pi rdrdx$, sarà $2\pi\rho r^3drdx$ il suo momento rispetto all'asse di rotazione, e

$$2\pi\rho\int\!\!\int r^3drdx = 2\pi\rho\int_0^y r^3dr\int dx = \tfrac{1}{2}\pi\rho\int y^4dx$$

quello dell'intero solido. Quindi se nell'ultimo integrale poniamo il valore di y^4 dedotto dall'equazione della curva generatrice, e lo estendiamo ai limiti che saranno definiti dall'estensione del solido, avremo l'espressione del richiesto momento d'inerzia. Così, chiamando b il raggio della base circolare di un cono retto ed a l'altezza, sarà

$$y=\frac{b}{a}\,x$$

l'equazione della retta generatrice della superficie conica;

e togliendo da essa il valore di y^4, avremo che il momento d' inerzia di un cono retto a base circolare, relativamente al suo asse, sarà espresso da

$$\frac{1}{2}\pi\rho\frac{b^4}{a^4}\int_o^a x^4dx = \frac{1}{10}\pi\rho b^4 a = \frac{3}{10}\mathrm{M}b^2.$$

Similmente sostituendo ad y^4 il valore che ne dà l'equazione del cerchio $y^2 = 2ax - x^2$, avremo pel momento d' inerzia di un segmento sferico, la cui freccia sia x_1,

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_o^{x_1}(4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)dx = \frac{\pi\rho x_1^3}{30}(20a^2 - 15ax_1 + 3x_1^2);$$

la quale espressione nel caso dell' emisfero diviene

$$\frac{4}{15}\pi\rho a^5 = \frac{2}{5}\mathrm{M}a^2.$$

243. Dalla definizione del momento d' inerzia (n° 239) si rileva che date le altre cose eguali, il suo valore dovrà dipendere dalla posizione dell' asse rispetto al corpo; posizione che può variare sia per moto dell' asse parallelamente a se medesimo, sia per rotazione di esso intorno ad un punto fisso.

Cominciando dal primo caso, supponiamo che essendo noto il momento d' inerzia S rispetto ad un asse A, se ne cerchi il valore rispetto ad un altro asse B, parallelo al primo e da questo distante della quantità a. Poniamo in A l' asse delle z ed il piano delle zx in quello delle due parallele A e B. Chiamando r la distanza di una molecola dm del corpo dall' asse B, avremo

$$r^2 = (x-a)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2;$$

in conseguenza

$$\Sigma r^2dm = \Sigma(x^2+y^2)dm - 2a\Sigma xdm + a^2\Sigma dm.$$

Or Σr^2dm è il richiesto momento d' inerzia, $\Sigma(x^2+y^2)dm$

è il momento dato S rispetto all'asse; e chiamando M la massa dal corpo ed x_1 l'ascissa del suo centro di gravità, avremo $\Sigma dm = M$ e $\Sigma x dm = Mx_1$; quindi sostituendo avremo

$$(1) \qquad \Sigma r^2 dm = S + Ma(a - 2x_1),$$

Perciò, essendo dato il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un certo asse, sarà facile determinarne il valore per ogni asse parallelo al dato, quando sia noto il centro di gravità del corpo.

Dall'equazione (1) si rileva ancora — 1° Che nell'ipotesi di $x_1 = \frac{1}{2}a$, vale a dire nel caso che la proiezione del centro di gravità cada sul punto medio della distanza degli assi, sarà $\Sigma r^2 dm = S$. E poichè si ha costantemente $x_1 = \frac{1}{2}a$ per tutte le posizioni che l'asse B potrà prendere sulla superficie di un cilindro retto a base circolare il cui asse di figura passi pel centro di gravità del corpo; ne segue che la superficie di un tal cilindro sarà luogo geometrico di un asse di dato momento, e di data inclinazione ai piani coordinati. — 2° Che supponendo l'asse A condotto pel centro di gravità del corpo, sarà $x_1 = 0$, e

$$(2) \qquad \Sigma r^2 dm = S + Ma^2.$$

Dunque per un dato sistema di assi paralleli il *minimo* momento d'inerzia apparterrà all'asse condotto pel centro di gravità del corpo.

244. Mercè la relazione espressa dall'equazione (2) sovente si agevola la ricerca dei momenti d'inerzia relativi a dati assi. Poniamo per esempio che si volesse il momento d'inerzia di un cilindro retto a base circolare, fisicamente omogeneo, rispetto ad un diametro della base.

Sia c il raggio della base del cilindro, nel cui centro poniamo l'origine delle x, dirette secondo l'asse di figura. Immaginiamo il solido diviso in falde infinitesime normali all'asse, e che ciascuna di queste sia suddivisa in anelli

concentrici, di cui r rappresentando il raggio variabile da o a c, $2\pi\rho r dr dx$ esprimerà la massa. E se per l'asse comune al sistema degli anelli componenti ciascuna falda, conduciamo dei piani tra loro inclinati ad angoli eguali ed infinitamente piccoli; ogni anello verrà suddiviso in elementi, la cui massa sarà espressa da $\rho ds dr dx$. Or se nella falda giacente alla distanza x dalla base del cilindro prendiamo per assi delle z ed y due diametri rettangolari, il momento d'inerzia di un elemento del 3° ordine $\rho ds dr dx$ rispetto all'asse delle z sarà espresso da

$$\rho y^2 ds dr dx = \rho y r dz dr dx = \rho r dr dx dz \sqrt{r^2 - z^2},$$

essendo $y = \sqrt{r^2 - z^2}$; quindi il momendo di un intero anello rispetto all'asse delle z sarà

$$\rho r dr dx \int \sqrt{r^2 - z^2}\, dz = \pi \rho r^3 dr dx,$$

e quello dell'intera falda rispetto al suo diametro sarà

$$\pi \rho dx \int_0^c r^3 dr = \tfrac{1}{4} \pi \rho c^4 dx.$$

Ma se questo momento, il quale è preso rispetto ad un asse condotto pel centro di gravità della falda, voglia riferirsi ad un asse parallelo che passi per l'origine, bisognerà aggiungervi il prodotto della massa della falda, espressa da $\pi \rho c^2 dx$, pel quadrato di x che rappresenta la distanza degli assi. Quindi il momento della falda rispetto ad un diametro della base del cilindro sarà

$$\tfrac{1}{4} \pi \rho c^4 dx + \pi \rho c^2 x^2 dx,$$

e quello dell'intero solido rispetto allo stesso diametro sarà

$$\tfrac{1}{4} \pi \rho c^4 \int_0^a dx + \pi \rho c^2 \int_0^a x^2 dx = \tfrac{1}{4} \pi \rho c^4 a + \tfrac{1}{3} \pi \rho c^2 a^3$$
$$= \tfrac{1}{12} M (3c^2 + 4a^2).$$

Proponiamoci ancora di determinare il momento d'inerzia di un parallelepipedo rettangolare rispetto ad un asse condotto pel suo centro di gravità parallelamente ad uno degli spigoli. Nel n° **240** abbiamo trovato che il momento d'inerzia di questo solido rispetto allo spigolo c, a cui poniamo parallelo il nuovo asse, è dato dall'espressione

$$\tfrac{1}{3}M(a^2+b^2).$$

Or essendo $\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ la distanza dei due assi, e chiamando X il richiesto momento d'inerzia, l'equazione (2) ci darà

$$\tfrac{1}{3}M(a^2+b^2) = X + \tfrac{1}{4}M(a^2+b^2);$$

donde

$$X = \tfrac{1}{12}M(a^2+b^2),$$

valore che nel caso del cubo di lato a diverrebbe

$$X = \tfrac{1}{6}Ma^2.$$

245. Passiamo or a considerare la dipendenza del valore di un momento d'inerzia dalla mobilità del suo asse intorno ad un punto fisso, che togliamo per origine delle coordinate. Siano x, y, z quelle del luogo occupato da una molecola dm del solido; r ne sia la distanza dall'asse, il quale faccia con quelli delle coordinate gli angoli α, β, γ, e l'angolo φ colla congiungente il luogo di dm coll'origine. Avremo

$$r^2 = (x^2+y^2+z^2)\operatorname{sen}^2\varphi = (x^2+y^2+z^2)(1-\cos^2\varphi);$$

e poichè ponendo $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = h$ si ottiene

$$\cos\varphi = \frac{x}{h}\cos\alpha + \frac{y}{h}\cos\beta + \frac{z}{h}\cos\gamma,$$

sarà

$$r^2 = (1-\cos^2\alpha)x^2 + (1-\cos^2\beta)y^2 + (1-\cos^2\gamma)z^2 - 2yx\cos\alpha\cos\beta \\ - 2zx\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma;$$

equazione che potremo scrivere ancora sotto la forma

$$r^2=(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(x^2+z^2)\cos^2\beta+(x^2+y^2)\cos^2\gamma-2yx\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2zx\cos\alpha\cos\gamma-2yx\cos\beta\cos\gamma\,,$$

essendo

$$1-\cos^2\alpha=\cos^2\beta+\cos^2\gamma\,,\ 1-\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\gamma\,,\ 1-\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta.$$

Quindi avremo

$$\Sigma r^2\,dm=\cos^2\alpha\Sigma(y^2+z^2)dm+\cos^2\beta\Sigma(x^2+z^2)dm+\cos^2\gamma\Sigma(x^2+y^2)dm$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\Sigma yx dm-2\cos\alpha\cos\gamma\Sigma zx dm-2\cos\beta\cos\gamma\Sigma yz dm.$$

Or indicando con A, B, C i valori delle sommatorie $\Sigma(y^2+z^2)dm$, $\Sigma(x^2+z^2)dm$, $\Sigma(x^2+y^2)dm$ che rappresentano i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi delle x, y, z; e ponendo $\Sigma r^2dm=\text{H}$, $\Sigma yxdm=l$, $\Sigma zxdm=m$, $\Sigma zydm=n$, l'equazione precedente diverrà

$$(3)\qquad \text{H}=\text{A}\cos^2\alpha+\text{B}\cos^2\beta+\text{C}\cos^2\gamma-2l\cos\alpha\cos\beta-2m\cos\alpha\cos\gamma$$
$$-2n\cos\beta\cos\gamma\,;$$

ed avremo così esplicitamente formolata la dipendenza del valore di H dagli angoli che l'asse del momento farà con quelli delle coordinate.

246. Or se nell'equazione (3) conservando ad H un certo valore poniamo variabili α, β e γ, è chiaro che in essa avremo l'equazione di una superficie, che sarà il luogo geometrico dell'asse di un dato momento H. E perchè questo luogo geometrico fosse espresso in funzione delle coordinate rettangolari dei suoi diversi punti, basterà sostituire a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gli equivalenti $\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$, $\frac{z}{h}$. Così avremo

$$(4)\qquad (\text{H}-\text{A})x^2+(\text{H}-\text{B})y^2+(\text{H}-\text{C})z^2+2lyx+2mzx+2nyz=0\,;$$

equazione che chiaramente esprime una superficie conica del 2° ordine, la quale confonde il suo centro coll'origine delle coordinate. E poichè ogni punto dello spazio può esser preso per origine, è manifesto che per ogni punto del-

lo spazio potremo definire la superficie conica che sarà luogo dell' asse di un dato momento H.

Dalle teoriche dell' Algebra applicata alla Geometria sappiamo che i termini contenenti i rettangoli delle variabili potranno sempre sparire nell' equazione (4); ed allora la superficie, che è luogo dell' asse di un dato momento H, sarà riferita ai suoi *diametri principali* sotto la forma

$$(5) \qquad (H-A)x^2+(H-B)y^2+(H-C)z^2=0,$$

nella quale le costanti A, B e C rappresentano i momenti d' inerzia del corpo rispetto ai diametri principali, che si confondono cogli assi coordinati. Questi diametri ed i rispettivi momenti hanno ricevuto il nome di *assi* e *momenti principali*; e riferendo ad essi l' equazione (3), questa si trasformerà in

$$(6) \qquad H=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma.$$

Così abbiamo il valore di H in funzione dei tre momenti principali A, B, C e degli angoli che cogli assi principali farà quello del momento richiesto.

247. Gli assi ed i momenti principali godono di alcune proprietà degne di nota, e che qui giova esaminare.

—1.° Sostituendo nell' equazione (6) una volta $1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$ a $\cos^2\alpha$, ed un' altra $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$ a $\cos^2\gamma$, avremo

$$(7) \qquad \begin{cases} H=A+(B-A)\cos^2\beta+(C-A)\cos^2\gamma \\ H=C-(C-A)\cos^2\alpha-(C-B)\cos^2\beta. \end{cases}$$

Or se poniamo $A<B<C$, queste ultime equazioni dimostreranno che H dovrà essere necessariamente compreso tra A e C; quindi di tutti gli assi che si potranno condurre per l'origine quello delle z darà il massimo momento d' inerzia, e quello delle x ne darà il minimo; ed affinchè sia $H=A$ o $H=C$, dovrà essere soddisfatta l'una o l'altra delle due

equazioni

$$(B-A)\cos^2\beta+(C-A)\cos^2\gamma=0\,,$$
$$(C-A)\cos^2\alpha+(C-B(\cos^2\beta=0\,,$$

dalla 1ª delle quali risulterà $\beta=\gamma=90^\circ$, ed $\alpha=\beta=90^\circ$ dalla 2.ª Dunque nell' ipotesi che siano diseguali i tre momenti principali, l' asse di massimo o minimo momento d'inerzia per un dato punto sarà unico, e coinciderà con uno degli assi principali relativi allo stesso punto.

— 2ª Se nell'equazione (6) poniamo $1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma$ in vece di $\cos^2\beta$, avremo

$$H=B-(B-A)\cos^2\alpha+(C-B)\cos^2\gamma\,;$$

in conseguenza non potrà essere $H=B$, se non sia soddisfatta l' equazione

$$(B-A)\cos^2\alpha=(C-B)\cos^2\gamma.$$

Or in quest' ultima equazione sostituendo a $\cos\alpha$ e $\cos\gamma$ gli equivalenti $\frac{x}{h}$ e $\frac{z}{h}$ (n° 246) avremo

$$(8)\qquad \frac{x}{z}=\pm\sqrt{\frac{C-B}{B-A}}.$$

Dunque il luogo dell' asse del momento medio B starà in due piani, che intersecandosi secondo l' asse delle y sono egualmente inclinati a destra ed a sinistra sì del piano xy che dell' altro yz; e perciò tutte le infinite rette che per l' origine siano condotte nei detti piani, potranno divenire assi del momento B. Purtuttavia è da osservarsi che fra queste infinite rette la comune intersezione soltanto dei due piani sarà perpendicolare agli assi dei momenti A e C, e formerà il 3° asse principale.

Potrebbe essere ancora $C=B$ o $B=A$, ed allora l'equazione (8) ci darebbe nel 1° caso $x=0$, e $z=0$ nel 2°. In conseguenza nell' uno e l'altro caso i due piani definiti dal-

l' equazione (8) si confonderanno in un solo perpendicolare all'asse del 3° momento; e due assi rettangolari che vi fossero comunque condotti per l'origine soddisferebbero alla condizione di essere relativi ai momenti eguali.

E se in fine fosse $A=B=C$, l' equazione (7) ci darebbe $H=A$, qualunque valore avessero α, β e γ; vale a dire che nell' ipotesi dell' eguaglianza fra i tre momenti principali, ogni retta condotta per l' origine potrà prendersi per asse del momento H. È questo il caso di una sfera omogenea rispetto al suo centro di figura, o di un cubo omogeneo quanto al suo centro di gravità.

Da tutte le quali cose in ultimo si rileva che gli assi principali di un corpo, relativi ad un dato punto, dovranno necessariamente esser tre o infiniti.

— 3.° L' asse di un momento H diverso da A, B e C, dovrà giacere nella superficie conica rappresentata dall' equazione (5). Nell' ipotesi di $H>B$ conduciamo un piano perpendicolare all' asse del momento massimo e distante dall' origine di $z=c$: la curva d' intersezione colla superficie conica sarà data dall' equazione

$$(H-A)x^2+(H-B)y^2=(C-H)c^2\,,$$

la quale avendo di uno stesso segno le tre costanti di $H-A$, $H-B$, $H-C$, rappresenterà un' ellissi, il cui centro giacerà sull' asse delle z. Dunque nel caso di $H>B$ l' equazione (5) rappresenterà la superficie di un cono retto a base ellittica, che avrà per asse quello del massimo momento; e se fosse $A=B$, la base del cono sarebbe un cerchio.

Se poi fosse $H<B$, allora conducendo un piano perpendicolare all' asse del momento minimo e distante dall' origine di $x=a$, la curva d' intersezione sarebbe data dall' equazione

$$(H-B)y^2+(H-C)z^2=(A-H)a^2\,,$$

che disegna ancora un' ellissi il cui centro è sull' asse del

momento A, e che diverrebbe un cerchio nell' ipotesi di $B = C$.

— 4.° Pel punto, in cui concorrono i tre assi principali di un corpo, immaginiamo menati altri tre assi rettangolari che facciano coi primi rispettivamente gli angoli $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$; e siano H, H', H'' i corrispondenti momenti d' inerzia. L' equazione (6) ci darà

$$\begin{aligned} H &= A\cos^2\alpha + B\cos^2\alpha' + C\cos^2\alpha'' \\ H' &= A\cos^2\beta + B\cos^2\beta' + C\cos^2\beta'' \\ H'' &= A\cos^2\gamma + B\cos^2\gamma' + C\cos^2\gamma''. \end{aligned}$$

Ma essendo $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$, $\alpha''\ \beta''\ \gamma''$ gli angoli che gli assi principali secondo le $x\ y\ z$ formano coi nuovi assi coordinati, dovranno essere soddisfatte le tre equazioni

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1\,; \end{aligned}$$

donde deriverà

$$H + H' + H'' = A + B + C.$$

Dunque la somma dei momenti d' inerzia rispetto a tre ass rettangolari rimarrà costante, comunque il sistema degli assi giri intorno alla propria origine; e l' avremo sempre eguale alla somma dei momenti d' inerzia intorno agli assi principali.

— 5°. Supponiamo trasportati parallelamente a loro stessi gli assi principali di un corpo relativi al centro di gravità; e siano a, b, c le coordinate della nuova origine. Avremo così

$$x' = x + a\,,\ y' = y + b\,,\ z' = z + c.$$

Essendo pei dati della quistione

$$\begin{aligned} &\int yxdm = 0\,,\ \int zxdm = 0\,,\ \int yzdm = 0 \\ &\int xdm = 0\,,\ \ \int ydm = 0\,,\ \ \int zdm = 0\,; \end{aligned}$$

sarà

$$\int yx'dm = mab\ ,\ \int z'x'dm = mac\ ,\ \int y'z'dm = mbc.$$

Basterà dunque che siano nulle due delle coordinate della nuova origine, perchè siano anche principali gli assi del nuovo sistema. In conseguenza prendendo un punto O sopra uno degli assi principali Gx, Gy, Gz relativi al centro G di gravità del corpo, e da quel punto conducendo due rette parallele ai rimanenti due assi, queste rette insieme al 3° asse rappresenteranno i tre assi principali relativi al punto O.

Ma se fosse soltanto $a = 0$, sarebbero

$$\int y'x'dm = 0\ ,\ \int z'x'dm = 0\ ,$$

e l'asse Ox' sarebbe principale pel punto O in cui incontra il piano dei rimanenti assi Gy e Gz. Dunque ogni retta parallela ad uno dei tre assi principali relativi al centro di gravità di un corpo, sarà un asse principale pel punto nel quale incontra il piano degli altri due.

— 6°. Nell'ipotesi di $A = B = C$ l'equazione (6) ci darà $H = A$, qualunque sia il valore di α, β e γ; e viceversa ponendo H indipendente da α, β e γ, dovrà necessariamente essere $A = B = C$. Or facciamoci a determinare le condizioni che per un dato corpo rendano possibile l'esistenza di un siffatto *centro di assi eguali*, vale a dire di un punto tale che passandovi comunque una retta, il momento ad essa relativo resti costante.

Indichiamo con O il punto richiesto, di cui supponiamo l'esistenza; ed immaginiamolo congiunto col centro di gravità G del corpo. Conducendo pel punto O un piano P perpendicolare alla congiungente GO, tutte le rette menate per quel punto nel piano P saranno altrettanti assi eguali; e per l'equazione (2) tali saranno ancora tutte le rette condotte pel centro G in un piano parallelo a P. Ma queste ultime rette non potrebbero rappresentare assi eguali, se il loro

piano non fosse quello di due assi principali eguali relativamente al centro di gravità: dunque il punto O non potrebbe esistere, se due degli assi principali relativi al centro di gravità del corpo non fossero eguali; e soddisfatte questa condizione, il centro richiesto non potrà trovarsi che sul 3° asse principale.

Poniamo che l'eguaglianza avesse luogo tra il momento medio ed il minimo, vale a dire che fosse $B = A$. Or il momento rispetto ad ogni retta menata pel punto O dovendo essere costante, sarà necessariamente eguale al 3° momento principale C nel cui asse giacerà il punto O. Quindi se per questo punto supponiamo menata una retta nel piano P, e facciamo $GO = D$, l'equazione (2) ci darà il momento massimo

$$C = A + MD^2,$$

donde

$$D = \pm \sqrt{\frac{C-A}{M}}.$$

Ma se fosse $B = C$, il punto richiesto dovrebbe giacere sull'asse del minimo momento; ed allora, ragionando come sopra, si troverebbe

$$D = \pm \sqrt{\frac{A-C}{M}},$$

ch'è un valore immaginario. Dunque l'esistenza del punto O richiederà non solamente l'eguaglianza di due assi principali rispetto al centro di gravità del corpo, ma che in questa eguaglianza non entri il momento massimo. E quando queste due condizioni saranno soddisfatte, vi saranno due punti O sull'asse di massimo momento ad eguali distanze dal centro di gravità.

E se in fine fosse $A = B = C$, sarebbe $D = 0$, ed il punto richiesto starebbe nel centro di gravità del corpo.

Proponiamoci, a modo di esempio, di determinare i cen-

tri degli assi eguali di un parallelepipedo rettangolare di cui a, b e c siano gli spigoli. Se pel centro di gravità di questo solido conduciamo tre rette rispettivamente parallele ad a, b e c, avremo evidentemente gli assi principali relativi a quel punto, ed i cui momenti saranno (n° 244)

$$A=\tfrac{1}{12}M(b^2+c^2)\,,\ B=\tfrac{1}{12}M(a^2+c^2)\,,\ C=\tfrac{1}{12}M(a^2+b^2).$$

Se poniamo $a=b$ e $c<a$, sarà

$$A=B=\tfrac{1}{12}M(a^2+c^2)\,,\ C=\tfrac{1}{6}Ma^2.$$

Sarà dunque $C>A$, e i due centri di eguali momenti giaceranno sull' asse parallelo allo spigolo c, e disteranno dal centro di gravità del solido di

$$D=\pm\sqrt{\frac{a^2-c^2}{12}}\,.$$

In conseguenza i due centri giaceranno dentro del parallelepipedo, sulle due basi quadrate, o fuori del solido, secondochè c è maggiore, eguale o minore di $\frac{a}{2}$.

248. Dalle cose dette nel n° 243 si rileva che la ricerca degli assi principali di un corpo per un dato punto dello spazio si riduce a quella dei diametri principali di una superficie conica del 2° ordine, che ha il centro nel punto dato. Or questa determinazione riesce agevole per quelle figure, in cui si scorge facilmente quali debbano essere le linee che tolte ad assi coordinati facciano sparire $\int yxdm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$: così, a modo di esempio, le rette menate pel centro di gravità di un parallelepipedo rettangolare omogeneo parallelamente ai suoi spigoli, saranno per quel punto gli assi principali del solido. Ma eccetto i casi così semplici, la determinazione degli assi principali di un solido riducendosi a quella dei diametri principali di una superficie del 2° ordine, dipenderà (com' è dichiarato dalle

teoriche della Geometria analitica) da un' equazione di 3° grado. Purtuttavia se fosse noto uno degli assi principali, come sarebbe di un solido omogeneo che ammettesse un asse di simmetria, la determinazione degli altri due non dipenderebbe che da un' equazione di 2° grado.

Riponendo nell' asse principale noto quello delle z, questa variabile non potrà trovarsi a 1° grado nell' equazione che rappresenta il luogo geometrico dell' asse corrispondente al momento H; e perciò l' equazione (4) dovrà prendere la forma

$$(H-A)x^2+(H-B)y^2+(H-C)z^2+2lyx=0.$$

Conduciamo per la stessa origine e nel piano delle xy due nuovi assi rettangolari, e chiamando φ l'angolo che il nuovo asse delle ascisse farà coll' antico; l' equazione (4) mercè le note relazioni

$$x=x'\cos\varphi-y'\operatorname{sen}\varphi$$
$$y=x'\operatorname{sen}\varphi+y'\cos\varphi$$

sarà trasformata in

$$(9)\quad Px'^2+Qy'^2+(H-C)z^2+[(A-B)\operatorname{sen}2\varphi+2l\cos2\varphi]y'x'=0;$$

nella quale per ragione di brevità si è posto

$$(H-A)\cos^2\varphi+(H-B)\operatorname{sen}^2\varphi+2l\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=P$$
$$(H-A)\operatorname{sen}^2\varphi+(H-B)\cos^2\varphi-2l\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=Q$$

Quindi il termine contenente il rettangolo $x'y'$ sparirà dall' aquazione (9), e perciò i nuovi assi coordinati saranno assi principali, quando sia soddisfatta la relazione

$$(A-B)\operatorname{sen}2\varphi+2l\cos2\varphi=0;$$

donde

$$(10)\qquad \operatorname{tang}2\varphi=\frac{2l}{B-A}.$$

Ponendo $\frac{2l}{B-A}=\frac{1}{h}$, avremo per determinare φ l' equazione

$$\tang^2\varphi+2h\tang\varphi-1=0.$$

Dunque φ avrà due valori; ma poichè le loro tangenti danno il prodotto -1, egli è chiaro che chiamando φ' uno dei valori di φ, l'altro dovrà essere $\varphi'+\frac{1}{2}\pi$; vale a dire che essi rappresenteranno gli angoli che i nuovi assi delle x ed y faranno coll' antico asse delle ascisse.

Si osservi ancora che il valore $\varphi=45^\circ$, che si otterrebbe dall' equazione (10) nell' ipotesi di $A=B$, si opporrebbe direttamente a ciò che abbiamo trovato nel n° 247. Ma è da considerarsi che l' ipotesi di $A=B$ richiede necessariamente l' altra di $l=0$; imperocchè se dall' equazione (8) risulta che fatto $A=B$ ogni retta menata per l'origine nel piano delle xy debba essere un asse principale, niuna di queste due variabili potrà trovarsi al 1° grado nell' equazione (4). Perciò essendo $A=B$, sarà $l=0$, e l'equazione (10) ci darà

$$\tang 2\varphi=\frac{0}{0}.$$

CAPO OTTAVO.

Delle forze possedute da un corpo nell'atto del suo moto, e del moto prodotto dall'azione di forze date.

Definizione del moto di traslazione. Riduzione di tutte le forze possedute dalle molecole di un corpo in questa specie di moto, ad una sola forza applicata al centro di gravità: e viceversa — Riduzione delle forze possedute da un corpo che rota, ad una sola forza ed una sola coppia. Valore della forza risultante in funzione della distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione — Analoga riduzione delle forze centrifughe generate dalla continuazione del moto rotatorio. Casi in cui sono nulle la forza e la coppia risultante. Determinazione del piano e del momento di questa coppia. Posizioni relative sì delle forze che delle coppie motrici e centrifughe — Determinazione del moto prodotto in un corpo dall'azione di una coppia. Componenti della coppia secondo gli assi principali del corpo. Angolo che l'asse di rotazione farà con quello della coppia. Equazione del piano della coppia; e come ne derivi l'idea di un'ellissoide centrale, a cui quel piano è tangente. Ragione di grandezza che deve esistere tra i diametri principali dell'ellissoide centrale. Luogo del polo istantaneo, e conseguenze che ne derivano. Azione delle forze centrifughe sulla grandezza e posizione delle forze impresse. Determinazione dell'asse di rotazione della coppia centrifuga. Teoremi che ne dipendono — Immagine della rotazione di un corpo. Curva descritta dal polo istantaneo sulla superficie dell'ellissoide centrale. Equazioni di questa curva: suo varie specie: massimo e minimo raggio vettore. Curva descritta dal polo istantaneo sul piano della coppia impressa: sue varie specie — Condizione di stabilità della rotazione di un corpo intorno ad uno degli assi principali — Equazioni del moto di rotazione — Rotazione di un corpo intorno ad un asse fisso. Centro di oscillazione. Centro di percossa.

249. Supponiamo che un piano, fisso ad un corpo in moto, resti parallelo a se medesimo in tutta la durata del moto. Egli è chiaro che in questa ipotesi le molecole del corpo avendo per ogn'istante del tempo velocità eguali e parallele, l'attuazione del moto sarà una pura traslazione.

Indichiamo con dm la massa di ogni molecola e con v la loro velocità comune; vdm esprimerà la forza donde ciascuna è animata, e $\int vdm$ disegnerà quella posseduta da tutto il corpo. Or è noto (n°. 35) che il centro di gravità di un corpo è il punto di applicazione della risultante di un sistema di forze parallele eguali, applicate a ciascuna delle sue molecole; in conseguenza quando il moto non è che pura traslazione, le forze eguali, da cui sono animate le molecole del corpo, saranno riducibili ad una forza sola applicata al suo centro di gravità, e rappresentata dal prodotto della velocità per la massa — E viceversa: se un corpo perfettamente libero sia spinto da una forza, la cui direzione vada pel centro di gravità del corpo, ne risulterà pura traslazione con una velocità definita dal quoziente del valore numerico della forza diviso per quello della massa.

Purtuttavia è da osservarsi che rispetto allo stato interiore una grande differenza esiste tra il corpo, le cui molecole già posseggono una velocità comune, e quello alle cui molecole la velocità è impartita per trasfusione di una forza diretta al centro di gravità del loro sistema. Nel primo caso le molecole, ancorchè prive d'ogni mutuo legame continueranno ad andare insieme, non esistendo forza diretta a separarle; mentre nel secondo caso l'urto con cui la forza si trasfonde, potrebbe disgiungere le molecole, su cui agisce immediatamente, da quelle che dovrebbero mediatamente parteciparne. Tutti i mezzi meccanici con cui *tagliamo*, *foriamo* ecc. comprovano la realtà di questa distinzione.

250. Or passiamo a determinare le forze che un corpo possiede nell'atto della sua rotazione. Considerando questo moto in un istante della sua durata, dovremo riguardare come immobile (n° 234) l'asse intorno al quale si aggira in quell'elemento di tempo. Sia OZ *(fig. 131)* questo asse; ed in un piano normale poniamo ad arbitrio i rimanenti assi rettangolari delle x ed y. Sia θ la celerità angolare ed r la distanza ab di una molecola dall'asse: θr sarà la velo-

cità effettiva, e $\theta r dm$ la forza, la quale andrà diretta secondo la tangente bc al punto b occupato in quello istante dalla molecola sulla circonferenza che dovrà descrivere. Trasportando la forza $\theta r dm$ nell'origine O, ed ivi decomponendola secondo i tre assi coordinati, ne avremo (n° 55) le tre componenti.

$$x_1 = -\theta y dm, \quad y_1 = \theta x dm, \quad z_1 = 0,$$

e le tre coppie

$$-\theta x z dm, \quad -\theta y z dm, \quad \theta(x^2+y^2)dm = \theta r^2 dm$$

Immaginando fatta una simile riduzione per ciascuna delle altre molecole, e chiamando X, Y, Z, L, M, N, le forze e le coppie risultanti, avremo

$$X = -\theta \int y dm, \quad Y = \theta \int x dm, \quad Z = 0$$

$$L = -\theta \int x z dm, \quad M = -\theta \int y z dm, \quad N = \theta \int r^2 dm.$$

Laonde tutte le forze che in un elemento di tempo agiscono sul corpo che rota intorno all'asse OZ, possono ridursi alla forza

$$P = \theta \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2},$$

ed alle tre coppie L, M, N; forza e coppie che si potranno compiutamente determinare, quando la forma e l'ordinamento molecolare del corpo siano algoritmicamente definiti.

251. Se x_1 ed y_1 rappresentano la x ed y del centro di gravità del corpo, sarà

$$m x_1 = \int x dm, \quad m y_1 = \int y dm;$$

in conseguenza indicando con D la distanza del centro di gravità del corpo dall'asse di rotazione, avremo

$$\sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2} = Dm;$$

e

$$P = \theta \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2} = Dm\theta,$$

Or questa forza P che incontra ad angolo retto l'asse di rotazione perchè non ha componente parallela all'asse della z, sarà perpendicolare ancora alla retta che disegna la distanza del centro di gravità dal medesimo asse. Ed in vero, sia g (*fig. 132*) la proiezione del centro di gravità sul piano xy; le sue coordinate gp, Ap saranno proporzionali a $\int ydm$, $\int xdm$. Ma le componenti di P parallele agli assi sono

$$X = -\theta \int ydm\,,\ Y = \theta \int xdm\,;$$

dunque togliendo

$$Aq = \theta \int ydm \text{ ed } An = \theta \int xdm\,,$$

avremo

$$Aq : An = pg : Ap.$$

Quindi i due triangoli Avn, Asg saranno simili, e l'angolo vAn sarà complemento di gAs. E questa dipendenza della direzione di P dal luogo assoluto del centro di gravità del corpo la renderebbe sempre varia nello spazio, se l'azione centrifuga generata dal moto rotatorio non la restituisse continuamente, come qui appresso diremo, alla sua primiera posizione.

Ma se il centro di gravità del corpo giacesse sull'asse OZ, avremmo

$$\int xdm = 0\,,\ \int ydm = 0\,;$$

quindi $P = 0$, e tutte le forze si ridurrebbero alla coppia risultante di L, M, ed N. E viceversa; ponendo $P = 0$, saranno necessariamente nulli $\int xdm$ e $\int ydm$, e l'asse di rotazione passerà pel centro di gravità del corpo. Quindi:

Se una coppia agisca sopra un corpo perfettamente libero, l'asse della rotazione prodotta passerà pel centro di gravità del corpo.

252. Rispetto poi alla determinazione della coppia risultante di L, M ed N, comporremo primieramente L con M

ed avremo la coppia

$$K = \theta \sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2},$$

il cui piano passerà per l'asse OZ; indi comporremo K con N, ed avremo la coppia richiesta

$$G = \sqrt{K^2 + N^2},$$

agente in un piano inclinato all'asse OZ sotto l'angolo φ dato dall'equazione

$$\cos\varphi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + N^2}}.$$

Ma se l' asse OZ fosse un asse principale, avremmo

$$\int xzdm = 0\ ,\ \int yzdm = 0\ ;$$

donde $K = 0$, $\varphi = 90°$, ed il piano della coppia G prodotta dalle forze θrdm, sarebbe perpendicolare all'asse di rotazione. Dunque:

Se il piano di una coppia agente sopra un corpo libero, sia perpendicolare ad uno degli assi principali relativi al centro di gravità del corpo, questa retta sarà l'asse della rotazione prodotta; e la celerità angolare θ *sarà data dall' equazione*

$$\theta = \frac{N}{\int r^2 dm},$$

vale a dire dal momento della coppia diviso pel momento d' inerzia del corpo rispetto all' asse principale, a cui il piano della coppia è normale [1].

[1] L' equazione $\theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$ ci offre la ragione, per la quale Eulero ha dato il nome di *momento d'inerzia* alle sommatorie della forma $\int r^2 dm$. Ed in vero, se un corpo di massa m concepisca la velocità v sotto l' azione di una forza f; corpi, che avessero le

253. Se nell'istante in cui ogni molecola del corpo che rota, è animata dall'impulso $\theta r dm$, altra forza non intervenisse, il moto sarebbe attuato secondo la tangente al punto della circonferenza su cui la molecola si trova. La coesione molecolare osta all'attuazione di questo moto rettilineo, e le molecole reagendo per la loro inerzia, prendono quella speciale tensione che costituisce la così detta forza centrifuga. Ed invero rappresenti A (*fig. 133*) il luogo occupato della molecola dm in un certo istante del tempo, AB la direzione della tangente, AD quella del raggio, ed AC l'archetto che sarà descritto nell'elemento di tempo che immediatamente seguirà a quello istante. Compiuto il rettangolo ABCD, e proiettati i lati AB, AD sulla diagonale AC, è chiaro che alle due forze AB, AD potremo sostituire le tre AM, AN, AC; e poichè l'angolo BAC è infinitesimo, le due forze AM ed AN saranno dirette secondo il raggio della circonferenza descritta dalla molecola dm. Or AM rappresentando la forza centrifuga, e la coesione molecolare essendo diretta secondo AN, si comprende come sotto una celere rotazione possa qualche particella del corpo separarsi dal resto della massa.

Essendo la velocità $v = \theta r$ per ogni molecola distante di r dall'asse di rotazione, la sua forza centrifuga sarà espressa (n° 169) da

$$\frac{v^2}{r}\, dm = \theta^2 r dm.$$

E trasportando nell'origine tutte queste forze dirette perpendicolarmente all'asse di rotazione, avremo analogamente alle

masse $2m$, $3m$, ecc. concepirebbero le velocità $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{3}v$, ecc.: e questa diminuzione di velocità in ragione dell'accrescimento di massa è un effetto dell'inerzia della materia. Or nello stesso modo che la massa di un corpo influisce sulla velocità del moto di traslazione prodotto da una certa forza, $\int r^2 dm$ determina la celerità angolare θ generata dalla coppia N.

forze impulsive θrdm una risultante

$$P_1 = \theta^2 \sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2},$$

e la coppia

$$K_1 = \theta^2 \sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2} = K\theta,$$

non essendovi coppia analoga alla N, perchè tutte le forze $\theta^2 rdm$ incontrano l'asse OZ (*fig. 131*).

Se questa retta passasse pel centro di gravità del corpo, avremmo

$$\int xdm = 0\,,\ \int ydm = 0,\ \text{quindi}\ P_1 = 0,$$

e l'asse OZ non sarebbe spinto a moto di traslazione dall'impulso delle forze centrifughe. E se l'asse di rotazione fosse un asse principale, sarebbe $K_1 = 0$; e le forze centrifughe non lo spingerebbero a rotare.

254. Essendo le forze centrifughe $\theta^2 rdm$ proporzionali alle forze impulsive θrdm e ad esse inclinate di 90°, ne segue che se AB ed AD (*fig. 134*) rappresentino in grandezza e direzione le θrdm per due molecole del corpo, e che AB' ed AD' siano gli analoghi determinanti delle rispettive forze centrifughe, sarà la risultante AC delle prime perpendicolare alla risultante AC' delle seconde. E continuando allo stesso modo la composizione delle analoghe forze per tutte le molecole del corpo, dovrà necessariamente riuscire la risultante P delle θrdm normale alla risultante delle forze centrifughe. Sarà dunque l'asse della coppia K_1 perpendicolare a quello della coppia K; e poichè il primo è ancora perpendicolare all'asse di rotazione, sarà in conseguenza normale al piano dell'asse di rotazione e di quello della coppia G (n° 252); dunque l'asse della coppia prodotta dalle forze centrifughe giacerà nel piano della coppia impressa.

Chiamando i l'angolo che l'asse della coppia G forma con quello di rotazione, avremo $K = G\,\mathrm{sen}\,i$; ma $K_1 = K\theta$; sarà

dunque

$$K_1 = G\theta sen i.$$

Perciò, immaginando due rette che rappresentino in grandezza e direzione la rotazione θ ed il momento della coppia G, il parallelogrammo su esse costruito rappresenterà il momento ed il piano della coppia K_1 dovuto alle forze centrifughe.

Osserviamo ancora che le forze centrifughe $\theta^2 rdm$ e le forze impulsive θrdm sono così situate le une rispetto alle altre che facendo girare le prime di 90° nel senso della rotazione del corpo esse verrebbero a combaciare colle direzioni delle seconde. Quindi essendo date le direzioni di P e K sarà facile definire quelle di P_1 e K_1. Ma se queste fossero date, delle prime non verrebbe ad esser nota che la sola linea di direzione; poichè P_1 e K_1 resteranno invariate quando il cangiato senso della rotazione del corpo farà girare di 180° le direzioni di P e K.

255. La riduzione, che finora abbiamo esaminato delle forze possedute da un corpo sia nell'origine sia nella continuazione del suo moto, ci offre il mezzo di risolvere il problema inverso, ossia quello di determinare il moto che sarà prodotto in un corpo dell'azione di forze date.

È noto (n° 55) che ogni sistema di forze è sempre riducibile ad una forza applicata all'origine e ad una coppia. Prendendo per origine il centro di gravità del corpo, su cui le forze si suppongono agire, potremo dunque dire che esse saranno sempre riducibili ad una sola forza applicata al centro di gravità e ad una sola coppia. Ci è noto (n° 249) quale sarà l'effetto della prima, non ci rimane dunque ad esaminare che quello della seconda.

Determinati gli assi ed i momenti principali relativi al centro di gravità del corpo se sia perfettamente libero (n° 251), ovvero relativi a quel punto intorno al quale potrà esser costretto a muoversi, ed i quali momenti indichiamo con A, B, C;

si decomponga il momento G della coppia impressa nei tre L, M ed N relativi ai medesimi assi. Queste coppie componenti avendo i loro piani perpendicolari agli assi principali produrranno delle celerità angolari p, q, r, espresse (n° 252) da

$$\frac{L}{A},\ \frac{M}{B},\ \frac{N}{C};$$

quindi la celerità angolare prodotta dalla coppia impressa sarà

$$\theta = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

ed avrà luogo intorno ad un asse definito dalle equazioni

$$\cos\alpha = \frac{p}{\theta},\ \cos\beta = \frac{q}{\theta},\ \cos\gamma = \frac{r}{\theta}.$$

Intanto l'asse della coppia G forma coi medesimi assi principali gli angoli dati dalle relazioni

$$\cos a = \frac{L}{G},\ \cos b = \frac{M}{G},\ \cos c = \frac{N}{G};$$

sarà dunque l'asse della rotazione θ inclinato a quello della coppia impressa sotto un angolo i dato dall'equazione

$$\cos i = \frac{Lp+Mq+Nr}{G\theta};$$

quindi l'asse della coppia impressa non potrà coincidere con quello della rotazione prodotta, se il piano della coppia non sia perpendicolare ad uno degli assi principali relativi al centro del moto [1].

256. Essendo L, M ed N le componenti della coppia G

[1] Dovrà dunque aversi come erronea in generale la costruzione data nel n° 365 degli *Elementi di Meccanica* del Venturoli, e che si trova ripetuta in qualche più recente trattato.

secondo gli assi principali, le equazioni

$$y = \frac{M}{L} x \ , \ y = \frac{M}{N} z$$

segneranno le proiezioni dell' asse di G su i piani coordinati yx, yz, ed in conseguenza le intersezioni del piano di G coi medesimi piani coordinati saranno definite dalle equazioni

$$y = -\frac{L}{M} x \ , \ y = -\frac{N}{M} z .$$

Donde sarà facile dedurre l'equazione del piano della coppia essere

$$Lx + My + Nz = 0 ,$$

che diverrà

$$Apx + Bqy + Crz = 0 .$$

sostituendo ad L, M ed N gli equivalenti Ap, Bq, Cr.

Or prendendo un punto, le cui coordinate siano proporzionali a p, q ed r, sulla superficie di un'ellissoide

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F^2 ,$$

i cui semiassi

$$a = \frac{F}{\sqrt{A}} \ , \ b = \frac{F}{\sqrt{B}} \ , \ c = \frac{F}{\sqrt{C}}$$

sono inversamente proporzionali alle radici quadrate de' momenti principali del corpo relativi al centro del moto; l'equazione del piano della coppia

$$Apx + Bqy + Crz = 0$$

esprimerà ancora il piano diametrale, parallelo al piano tangente l'ellissoide nel punto (p, q, r). E poichè il piano di una coppia può ovunque trasportarsi parallelamente a se stesso, egli è chiaro che :

Il piano di una coppia, agente sopra un corpo sia li-

bero sia mobile intorno ad un punto fisso , potrà sempre riguardarsi come tangente ad un' ellissoide che avrà centro in quello del moto e perciò denominata ellissoide centrale, *ed i cui semiassi siano inversamente proporzionali alle radici quadrate dei momenti principali del corpo relativi allo stesso centro.*

267. Gli assi di questa ellissoide , i quali non sono definiti di grandezza ma semplicemente di ragione , variabile secondo la forma e l'ordinamento molecolare di un corpo, debbono purtuttavia nei loro valori assoluti soddisfare ad una certa condizione, senza la quale la figura escogitata non potrebbe convenire a verun corpo possibile. Ed in vero essendo

$$A = \int (y^2 + z^2)dm\,, \quad B = \int (x^2 + z^2)dm\,, \quad C = \int (x^2 + y^2)dm\,,$$

ciascuno di questi momenti sarà minore della somma degli altri due. Or se questi momenti hanno tal ragione di grandezza che sia

$$A < B < C\,,$$

ossia

$$\frac{1}{a^4} < \frac{1}{b^4} < \frac{1}{c^4}\,,$$

ciascuna di queste tre quantità dovrà esser minore della somma delle altre due. La relazione di disuguaglianza che le unisce , e che rispetto alle due prime rende necessaria la condizione richiesta, potrebbe farla desiderare rispetto ad $\frac{1}{c^4}$. In conseguenza i valori assoluti dei semidiametri principali dell'ellissoide centrale dovranno soddisfare alla relazione

$$\frac{1}{c^4} < \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\,;$$

vale a dire che dovrà essere

$$c > \frac{ab}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}\,.$$

La quale relazione, tradotta in costruzione geometrica, esprime che i semiassi a e b ponendosi eguali ai cateti di un triangolo rettangolo qualunque, il semiasse minore c debba essere più grande della perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa.

258. Le coordinate del punto di contatto del piano della coppia coll'ellissoide centrale essendo proporzionali a p, q, r, ed in conseguenza a quelle di ogni punto giacente sull'asse della rotazione θ; il *polo istantaneo*, ossia il punto d'incontro di questo asse colla superficie dell'ellissoide, giacerà sempre in quello del contatto; e la distanza di questo punto dal centro sarà proporzionale a $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ossia a θ. In conseguenza:

Quando un corpo riceve l'azione di una coppia, il polo istantaneo di rotazione starà nel punto di contatto del piano della coppia coll'ellissoide centrale; il raggio menato a quel punto sarà l'asse della rotazione iniziale, e proporzionale alla sua lunghezza sarà la celerità angolare del corpo — E viceversa: *ogni corpo che liberamente rota, è animato da una coppia il cui piano è tangente al polo.*

Da questo teorema deriva — 1° Che se il piano della coppia sia perpendicolare ad uno degli assi principali relativi al centro di moto, il corpo continuerà indefinitivamente a girarvi intorno con una celerità angolare costante e direttamente proporzionale alla lunghezza di quell'asse. Imperocchè, essendo nulle nel caso che consideriamo le due coppie K e K_1, l'asse iniziale non avrà tendenza a mutamento di sito e perciò diverrà asse permanente di rotazione, e la celerità angolare, che dev'esser sempre proporzionale alla sua lunghezza, avrà necessariamente un valore costante. Così la terra ed i rimanenti pianeti eseguendo le loro rivoluzioni diurne intorno ad assi principali, le compiono con moto uniforme.

— 2° Che per un medesimo corpo ed una stessa coppia,

la celerità angolare sarà massima per l'asse di minimo momento. Or pei corpi fluidi, che l'azione delle mutue tendenze molecolari fa esser terminati da superficie sferiche, le forze centrifughe non possono equilibrarsi senza diminuire le tendenze molecolari nelle direzioni normali all'asse di rotazione, e quindi produrre una depressione polare più o meno sensibile. E poichè coll'aumentato raggio equatoriale la forza centrifuga si accresce del pari, la depressione polare risulterebbe indefinita, se l'aumento che per l'alterata forma del corpo avviene nel momento d'inerzia relativo all'asse di rotazione, non facesse decrescere la celerità angolare, e con essa l'energia della forza centrifuga.

259. Ma se le condizioni di equilibrio delle forze centrifughe non sono soddisfatte, quale sarà nella continuazione del moto la loro influenza sulle forze impresse? — Per esaminare questa importante quistione in tutta la sua generalità, supporremo nel corpo un moto qualunque, che sappiamo (n° 237) potersi ridurre a moto di traslazione lungo un asse di contemporanea rotazione. Sia OZ (*fig. 135*) la posizione dell'asse in un certo istante del tempo; Q la forza, che applicata al centro g di gravità del corpo, lo spinge parallelamente ad OZ; ed OP, OK, ON rappresentino la forza P e le coppie K ed N, produttrici della celerità angolare θ.

Supponendo che nel tempo dt il punto O fosse dal moto di traslazione trasportato in O', le rette OP, OK, Og si troverebbero in O P', O'K', O'g', se la contemporanea rotazione col farle girare per gli archi

$$P'P''=P\theta dt\,,\ K'K''=K\theta dt\,,\ g'g''=a\theta dt\,,$$

non le avesse trasportate in O'P'', O'K'', O'g''.

Ma nel tempo che si attuava la rotazione θdt, L'azione centrifuga svolgeva la forza P_1dt che composta colla forza O'P'', dava la risultante O'P', e la coppia $K_1dt=K\theta dt$ che riduceva la coppia O'K'' al luogo ed al valore O'K'. Quindi dopo il tempo dt in vece delle forze OP, gQ e delle coppie OK, ON

avremo le forze O P', $g''Q'$ e le coppie O'K' ed O N'. Or egli è facile dimostrare che questo sistema di forze e coppie sia identico a quello che agiva nell' origine del tempo dt.

Ed in vero, non tenendo conto delle coppie O'N', O K' la cui identità colle coppie ON ed OK è resa evidente dai teoremi (n° 31 a 33) che ne reggono l'azione, immaginiamo trasportate in OP e $g'Q$ le forze O'P' e $g''Q'$. Ne risulteranno le coppie (P, — P) e (Q, — Q), l'una col braccio di leva OO', e l'altra col braccio $g'g''=a\theta dt$, ponendo $Og=a$. Ma chiamando m la massa del corpo, ed u la sua velocità di traslazione, avremo

$$Q=mu\,,\ \ OO'=udt\,;$$

sarà quindi il momento

$$Q.g'g''=mau\theta dt,$$

e l' altro

$$P.OO'=Pudt=mau\theta dt \text{ (n° 251)}.$$

Ma queste due coppie di eguali momenti, agendo in piani paralleli (n° 251) ed in opposte direzioni, si faranno a vicenda equilibrio; in conseguenza dopo il tempo dt troveremo le stesse forze P e Q, e le medesime coppie K ed N, che agivano nell'origine di esso. E poichè altrettanto dovrà verificarsi in tutta la serie degli elementi dt, egli è chiaro che le forze centrifughe svolte nell'atto del moto sono quelle che conservano inalterati il valore ed il luogo delle forze impresse.

Or è noto che l'asse della rotazione θ, prodotta dalla coppia impressa, dipende per grandezza e direzione dalle celerità componenti p, q ed r, che sono funzioni delle componenti della coppia G secondo gli assi principali del corpo. Ma durante la rotazione del corpo, il piano della coppia G restando fisso nello spazio mercè l'azione conservatrice delle forze centrifughe, mentre gli assi principali trasportati dal moto rotatorio vanno cangiando di luogo, e quindi d'incli-

nazione al piano della coppia impressa, le componenti p, q ed r varieranno del pari, e con esse la grandezza e posizione dell' asse di rotazione del corpo. La mobilità dunque nell' asse della rotazione prodotta dall'azione di una coppia, il cui piano non sia perpendicolare ad alcuno degli assi principali del corpo relativi al centro di moto, è un effetto immediato dell' azione conservatrice delle forze centrifughe.

260. È noto (n° 254) che l'asse della coppia K_1 dovuta alle forze centrifughe, giacerà nel piano della coppia impressa: or nello stesso piano dovrà giacere ancora l' asse della rotazione γ da essa prodotta. Imperocchè, sia O (*fig. 136*) il centro del moto e quindi dell' ellissoide, OI l' asse della rotazione θ ed OG quello della coppia impressa; sarà GOI il piano della coppie K_1 (n° 254). Or l' asse della rotazione γ dovendo esser coniugato (n° 258) al piano GOI della coppia da cui è prodotta, dovrà essere coniugato alla retta OI. Ma il piano della coppia impressa è il luogo di tutte le rette che possono essere coniugate all' asse OI; dunque nel piano della coppia impressa dovrà giacere l' asse della rotazione γ.

Da questo teorema derivano i seguenti corollarii.

— 1° Nel piano AB (*fig. 136*) della coppia impressa s'intenda condotta dal centro di moto O la OC, che rappresenti in grandezza e direzione la rotazione γdt prodotta dalla coppia acceleratrice K_1. Se OI è l' asse della rotazione θ nell' origine del tempo dt, la diagonale OF del parallelogrammo costruito sulle due rette OI ed OC rappresenterà in grandezza e direzione l' asse intorno a cui rotèrà il corpo nella fine del tempo dt.

Da questa costruzione si rileva chiaramente che i punti estremi F di tutte le successive posizioni e grandezze dell'asse istantaneo saranno ad una distanza costante dal piano della coppia impressa; ma chiamando i l' angolo che l' asse della coppia forma con quello di rotazione, sarà $\theta \cos i$ la distanza, di cui parliamo; avremo dunque

$$\theta \cos i = costante.$$

In conseguenza: *la componente della celerità angolare secondo l' asse della coppia impressa, sarà costante in tutta la durata del moto.*

— 2.° In tutta la durata del moto essendo costanti i valori di G (n° 259) e $\theta \cos i$, sarà

$$G\theta\cos i = costante.$$

Ma disegnando $G\cos i$ il momento di G secondo l' asse di rotazione, avremo (n° 250).

$$G\cos i = \theta \int r^2 dm,$$

quindi

$$G\theta\cos i = \theta^2 \int r^2 dm = costante.$$

Or essendo θr la velocità effettiva di ogni molecola dm situata alla distanza r dall' asse di rotazione, $\theta^2 r^2 dm$ esprimerà il prodotto della massa dm pel quadrato della rispettiva velocità. Questo prodotto va sotto il nome di *forza viva;* dunque:

In tutta la durata della rotazione di un corpo la somma delle forze vive resterà costante.

— 3.° Chiamando u la distanza del polo istantaneo I dal centro di moto, e p, q, r, le coordinate del punto I, i coseni degli angoli che il raggio OI farà coi diametri principali dell' ellissoide, saranno espressi da $\frac{p}{u}$, $\frac{q}{u}$, $\frac{r}{u}$; ed il momento d' inerzia del corpo rispetto all'asse OI sarà (n° 246)

$$\int r^2 dm = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{u^2}.$$

Abbiamo d' altronde (n° 256)

$$A = \frac{F^2}{a^2}, \quad B = \frac{F^2}{b^2}, \quad C = \frac{F^2}{c^2};$$

sarà dunque

$$\int r^2 dm = \frac{F^2}{u^2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}\right) = \frac{F^2}{u^2}.$$

E moltiplicando per θ^2 i due membri di quest' ultima equazione, si avrà

$$\frac{\theta^2 \int r^2 dm}{F^2} = \frac{\theta^2}{u^2}.$$

Ma F^2 e $\theta^2 \int r^2 dm$ sono costanti; tale sarà ancora $\frac{\theta}{u}$, e perciò sarà sempre θ proporzionale ad u. Dunque:

In tutta la durata del moto la celerità angolare θ sarà proporzionale alla lunghezza del raggio vettore, condotto dal centro al punto in cui l' asse istantaneo incontra la superficie dell' ellissoide centrale.

— **4.°** Essendo $\theta = nu$, n indicando un fattore costante, sarà

$$\theta \cos i = nu \cos i = costante.$$

Ma $u \cos i$ rappresenta la distanza del centro dell' ellissoide dal piano della coppia impressa che ne tocca la superficie nel luogo del polo istantaneo; dunque in tutta la durata del moto il centro dell'ellisoide sarà ad una distanza costante dal piano della coppia motrice; e poichè il centro dell' ellissoide è fisso, ed il piano della coppia deve restare sempre parallelo a se stesso, così il piano con cui l' ellissoide dev' essere costantemente a contatto, sarà sempre lo stesso nello spazio assoluto.

261. Per rappresentare dunque al nostro pensiero la successione dei luoghi occupati da un corpo che rota, immaginiamo condotti pel suo centro di gravità, o pel punto fisso intorno al quale deve girare, i tre assi principali relativi a quel punto; e tolte su essi tre rette reciprocamente proporzionali alle radici quadrate dei rispettivi momenti d'inerzia, figuriamoci costruita un' ellissoide che abbia quelle rette per diametri principali: il moto del corpo consisterà in tale rotazione dell' ellissoide intorno al centro di moto da rimanere costantemente a contatto del piano della coppia impressa. Le rette menate dal centro dell'ellissoide al punto in cui tocca il

piano della coppia, rappresenteranno le successive posizioni dell'asse istantaneo, e proporzionali alle loro lunghezze saranno le rispettive celerità angolari. E conoscendo così i diversi luoghi occupati dal mobile e la ragione dei tempi impiegati in percorrerli, avremo un'idea soddisfacente del suo moto.

262. Or se consideriamo sulla superficie dell'ellissoide centrale la serie dei punti, coi quali verrà toccando il piano della coppia impressa, si avrà la curva s (n° 235) descritta dal polo istantaneo nell'interno del corpo; e se consideriamo sul piano della coppia i punti venuti a contatto dei primi, si avrà la curva σ descritta dallo stesso polo nello spazio assoluto.

Per definire la curva s osserviamo primieramente che dovendo essa giacere sulla superficie dell'ellissoide, le coordinate dei suoi punti dovranno soddisfare l'equazione

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ;$$

e dovendo inoltre il centro dell'ellissoide rimanere ad una distanza costante h dal piano della coppia impressa, dovrà ancora aver luogo la relazione

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2}\ [1].$$

[1] Essendo $u\cos i$ la distanza del centro dell'ellissoide dal piano della coppia impressa, avremo l'equazione

$$u\cos i=h.$$

Nella quale sostituendo ad u e $\cos i$ i valori ottenuti nei n. 255 e 260-3°, risulterà

$$\frac{Lp+Mq+Nr}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}=h.$$

Ma (n. 255 e 256) $L=pA=\frac{p}{a^2}$, $M=\frac{q}{b^2}$, $N=\frac{r}{c^2}$, sostituen-

E se dalle equazioni (1) e (2) eliminiamo successivamente ciascuna delle tre variabili, avremo

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{a^2-b^2}{b^4}\, y^2 + \frac{a^2-c^2}{c^4}\, z^2 = \frac{a^2-h^2}{h^2} \\
&\frac{a^2-b^2}{a^4}\, x^2 + \frac{c^2-b^2}{c^4}\, z^2 = \frac{h^2-b^2}{h^2} \\
&\frac{a^2-c^2}{a^4}\, x^2 + \frac{b^2-c^2}{b^4}\, y^2 = \frac{h^2-c^2}{h^2}
\end{aligned}
\right.
$$

che rappresentano le proiezioni della curva s sopra i tre piani coordinati.

263. Supponendo nelle tre costanti a, b, c l' ordine di grandezza

$$a > b > c\,,$$

a e c saranno i valori limiti di h. Ponendo $h = a$, le equazioni (3) ci daranno

$$x = a\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,;$$

e ponendo $h = c$, dalle stesse equazioni avremo

$$x = 0,\ y = 0,\ z = c.$$

Dunque nell' ipotesi dei valori limiti di h, la curva s si ridurrà ad un punto; e conformente a ciò che abbiamo detto

do avremo

$$\frac{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{p^2}{a^4}+\frac{q^2}{b^4}+\frac{r^2}{c^4}}} = h.$$

Elevando a quadrato quest' ultima equazione, ed osservando che p, q ed r sono le coordinate del polo istantaneo, e che $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=1$, risulterà la formola data nel testo.

nel n° 258, il corpo roterà intorno all' asse $2a$, ovvero $2c$ dell' ellissoide centrale.

Fuori le due ipotesi anzidette, potrà essere $h>b$, $h<b$, $h=b$. Nei due primi casi la proiezione della curva s sul piano delle zx sarà un arco d' iperbole, il cui diametro principale trasverso coinciderà con quello delle x o delle z, secondochè sarà h più o meno grande di b. Delle altre due proiezioni poi della stessa curva l' una sarà un' ellissi intera sulla sezione principale dell' ellissoide, perpendicolare all' asse delle x o delle z, secondochè h sarà più o meno grande di b, e l' altra non sarà che un arco di ellissi.

Dalle quali cose si rileva — 1.° Che s è una curva chiusa a doppia curvatura — 2.° che essa si divide in quattro parti eguali e simmetriche, separate da altrettanti vertici che risiedono nei punti d' incontro della curva coi piani principali dell' ellissoide — 3.° Che essa sta a guisa di ruota intorno all' asse delle x o delle z.

Considerando infine l' ipotesi di $h=b$, osserviamo che allora la 2ª delle equazioni (3) ci darà

$$z=\pm\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x.$$

La curva s sarà dunque un' ellissi giacente in un piano inclinato a quello delle yx sotto l' angolo φ definito dalla tangente $\pm\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$. Sarà b il semiasse minore dell' ellissi ; e moltiplicando per $sec\varphi$ il semidiametro principale secondo le x della proiezione di s sul piano delle yx, ne avremo il semiasse maggiore

$$\beta=\sqrt{a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{b^2}}\,.$$

264. Qualunque poi siano la forma e giacitura della curva s, determinate dalla diversa ragione di h a b, se ci facciamo a determinare il valore massimo o minimo del raggio

vettore

(4) $$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

menato dal centro dell'ellisoide ad un punto qualunque della curva s, la funzione che n'esprime il valore generico e le equazioni (1) e (2) ci daranno le relazioni

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0$$
$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$
$$\frac{x}{a^4} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{dz}{dx} = 0.$$

Dalle quali eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ si avrà

$$yx = 0,$$

che sarà l'equazione di condizione pel massimo o minimo valore di u. Similmente prendendo y in luogo di x come variabile indipendente, troveremo l'altra equazione di condizione

$$yz = 0.$$

Le due equazioni $yx = 0$ ed $yz = 0$ ci danno i due sistemi

$$x = 0, \text{ o } y = 0$$
$$z = 0, \text{ o } y = 0.$$

E Chiamando α, β, γ, i valori del raggio vettore determinati nelle ipotesi di $x = 0, y = 0$ $z = 0$ avremo

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2c^2}{h^2}$$
$$\beta^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{h^2}$$
$$\gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{h^2}.$$

Ma risolvendo le equazioni (1), (2) e (4) rispetto alle variabili x, y, z, troveremo

$$x^2=\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left[u^2-(b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{h^2})\right]$$

$$y^2=\frac{-b^4}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\left[u^2-(a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{h^2})\right]$$

$$z^2=\frac{c^4}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\left[u^2-(a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{h^2})\right];$$

dunque β è il raggio vettore massimo, α e γ ne sono i minimi valori, poichè ogni valore più grande di β renderebbe y immaginaria; e lo stesso avverrebbe di x con un valore minore di α, e di z con un valore più piccolo di γ.

Il valore β essendosi ottenuto supponendo $y=0$, è chiaro che il raggio vettore massimo giacerà nel piano zx. Rispetto poi agli altri due valori bisognerà osservare se h sia maggiore o minore di b. Essendo $h>b$, α sarà il minimo raggio vettore e giacerà nel piano yx; e γ, che sarà minore di h, poichè la differenza

$$h^2-\gamma^2=\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{h^4}$$

è positiva, non apparterrà a verun punto della curva. Al contrario sarà γ il raggio vettore minimo nell' ipotesi di $h<b$, ed α resterà escluso.

265. La determinazione dei massimi e minimi raggi vettori della curva s, i quali si succedono a vicenda nei punti in cui essa incontra i piani principali dell' ellissoide, ci apre la via ad un' esatta cognizione della curva σ che il polo istantaneo descrive sul piano della coppia impressa. Imperocchè considerando la curva σ come generata da un raggio vettore v di cui sia polo il piede della perpendicolare condotta dal centro dell' ellissoide sul piano della coppia, egli è chiaro che v sarà la proiezione del raggio u della curva

s; e che in conseguenza essendo

$$v = \sqrt{u^2 - h^2},$$

questo raggio vettore dovrà sperimentare le stesse fasi di massimo e minimo, alle quali soggiace l'altro u. E poichè queste fasi di u si riproducono alternativamente e per eguali valori ad ogni quarta parte della lunghezza di s; così la curva σ dovrà serpeggiare tra due circonferenze di cui sarà centro comune il piede della perpendicolare h, ed avranno per raggi il valore massimo e minimo di v. Quindi il Poinsot, a cui è dovuta tutta questa nuova teorica della rotazione, avendo dato il nome di *polodia* (via del polo) alla curva s, ha poi chiamato *erpolodia* (via serpeggiante del polo) la curva σ.

Questa curva presenterà dunque dei vertici salienti e rientranti come indica la *fig. 137*. E se l'angolo aoc, o il suo eguale tos, sia commensurabile con quattro angoli retti, vi sarà un numero n di circonferenze ch' essendo il moltiplice più piccolo di quel valore angolare, renderà soddisfatta l'equazione

$$m\varphi = 2n\pi,$$

φ disegnando l'angolo aoc. In conseguenza quando il polo istantaneo avrà percorso m volte lo spazio angolare φ, ritornerà al medesimo luogo dello spazio assoluto e chiuderà la la curva σ. Ma non tornerà allo stesso luogo nel corpo, poichè l'intervallo che separa due vertici salienti o rientranti di σ, non occupa che la metà della lunghezza di s. Quindi per ottenere il ritorno del polo al medesimo luogo sì nello spazio assoluto che nel corpo, è d'uopo raddoppiare il numero m.

Ma se φ fosse incommensurabile coll'angolo retto, il polo istantaneo non potrebbe giammai ritornare allo stesso luogo nello spazio assoluto, e la curva σ resterebbe necessariamente aperta.

266. Tutto ciò avrà luogo quando h sia maggiore o minore di b. Che se fosse $h=b$, l' ellissi a cui in questo caso si ridurrebbe la curva s, portando successivamente i suoi elementi ds a contatto del piano della coppia impressa, vi descriverebbe una spirale avente un polo asintotico nel piede della perpendicolare h. E per fermo, poniamo che il contatto dell' ellissi col piano della coppia cominci per l' estremità dell' asse maggiore 2β, e che dopo un numero finito di giri intorno al centro dell' ellissoide l' estremità dell' asse minore $2b$ potesse venire a contatto dello stesso piano. Se ciò fosse possibile un egual numero di giri eseguiti in senso opposto dovrebbe ricondurre la medesima estremità del diametro 2β a contatto dello stesso piano. Ma una volta che l' estremità dell' asse $2b$ avrà toccato il piano della coppia, l' altezza h si confonderà col raggio b dell' ellissi, e questa curva potrà farvi intorno infiniti giri, senza che l' estremità di b fosse perciò allontanata da quella di h. Dunque cominciando dall' istante in cui il punto estremo di 2β toccherà il piano della coppia, nessun numero finito di giri potrà condurre di $2b$ a contatto dello stesso piano; ed in conseguenza la curva σ dovrà essere necessariamente una spirale, il cui raggio vettore dal valore massimo $\sqrt{\beta^2-h^2}$ convergerà continuamente a zero senza pervenirvi giammai. E così il polo istantaneo, che percorrebbe il quarto della curva s in un tempo infinito, non potrà mai ritornare nè allo stesso luogo dello spazio, nè allo stesso luogo del corpo.

267. Se poi fossero eguali due dei momenti principali del corpo, l' ellissoide centrale sarebbe un solido di rotazione allungato o depresso, secondochè sarebbe $b=c$, o $b=a$, Ponendo $b=c$, sarà $h>b$, e la curva s giacerà intorno all' asse $2a$; e facendo $b=a$, sarà $h<b$, e la curva s giacerà intorno all' asse $2c$. La polodia starà dunque sempre intorno all' asse di rotazione, avrà forma circolare, e costante il valore del suo raggio vettore u; e σ sarà la circonferenza di un cerchio, descritta col raggio $\sqrt{u^2-h^2}$.

E finalmente nell' ipotesi di $a = b = c$ l' ellissoide centrale diverrà una sfera; le due curve s e σ si confonderanno in un punto solo, e l' asse istantaneo coinciderà con quello della coppia impressa. Sarebbe questo il caso di una sfera omogenea mobile intorno al suo centro, o di qualsivoglia corpo che dovesse girare intorno al centro dei suoi momenti eguali (n° 246 — 6°)

268. Quando il piano della coppia impressa tocca l' ellissoide centrale in uno de' suoi vertici, il diametro principale che passa pel punto di contatto, sarà un asse permanente di rotazione. Ma se intervenisse l' azione di una nuova coppia, l' asse di rotazione verrebbe rimosso dal suo luogo, e la coppia dovuta alle forze centrifughe, riproducendosi, lo menerebbe per una polodia più o meno grande intorno a quell' asse principale, o ne lo devierebbe indefinitamente.

Per trovare le condizioni di stabilità dell' asse di rotazione, immaginiamo l' ellissoide centrale divisa dai piani delle due ellissi, che nel caso di $h = q$ segnano le vie del polo istantaneo. Questi due piani sono inclinati da un lato e l' altro dell' asse $2a$ sotto un angolo φ definito dalla tangente $\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ (n° 263); e nel supplemento $\pi - 2\varphi$ dell' angolo diedro 2φ che essi formano, giace il diametro $2c$.

Or poniamo che nel momento in cui sopraggiunge la coppia, che dà moto al polo, la rotazione si attuasse intorno all' asse $2c$. Se dietro l' impulso ricevuto dalla nuova coppia, l' asse di rotazione rimane tuttavia nell' angolo diedro $\pi - 2\varphi$, il polo istantaneo non lascerà di aggirarsi intorno al diametro $2c$; e senza perdere questa tendenza avrà potuto soffrire un deviamento tanto più grande per quanto sarà maggiore l' angolo $\pi - 2\varphi$, vale a dire per quanto b sarà meno diverso da a. Purtuttavia, ancorchè l' angolo $\pi - 2\varphi$ fosse piccolo, l' asse di rotazione potrebbe conservare la sua stabilità se dietro l' urto ricevuto il polo istantaneo fosse spinto a de-

scrivere intorno al diametro $2c$ un' orbita molto stretta ed allungata.

Egli è facile comprendere che quelle stesse condizioni che accrescono la stabilità intorno all' asse $2c$, la diminuiscono per l' asse $2a$, imperocchè di quanto aumenta l'angolo $\pi - 2\varphi$, di altrettanto deve diminuirsi l' angolo φ. E considerando la dipendenza di questo angolo dalle costanti a, b, c, ed in conseguenza dai momenti principali del corpo, egli è chiaro che quando due di questi momenti sono prossimi all' eguaglianza, la rotazione non ha grande stabilità che intorno all' asse del 3° momento; ed a questa condizione soddisfa per l' appunto l' asse di rotazione del nostro globo.

Che se poi la rotazione si attuasse intorno al diametro $2b$, e che l' asse fosse trasportato in uno degli angoli adiacenti 2φ, o $\pi - 2\varphi$, il polo andrebbe a descrivere l' orbita s intorno al diametro $2a$, o $2c$, perdendo ogni tendenza di ritornare verso $2b$. E la perderebbe del pari, se fosse spinto a muoversi nel piano di una delle due ellissi di sopra considerate, poichè allora tenderebbe a ragginngere l' estremità opposta del diametro $2b$ senza pervenirvi giammai. Avvi purtuttavia un caso di stabilità per l' asse $2b$, ed è quello in cui l' azione della nuova coppia lo trasportasse nel piano di una delle due ellissi in direzione apposta a quella, per la quale viene menato dalla rotazione del corpo.

269. Cercando le espressioni algoritmiche delle relazioni per le quali, come speciali funzioni del tempo, sono tra esse dipendenti l' energia di una coppia acceleratrice, la velocità prodotta ed il luogo occupato dall'asse di rotazione, avremo le equazioni generali che convengono a questa specie di moto.

Essendo Ap, Bq, Cr le componenti di una coppia impulsiva (n° 255) secondo gli assi principali relativi al centro del moto, saranno $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$ quelle di una coppia acceleratrice riferita ai medesimi assi. Ma se il corpo non è sottoposto a veruna forza continua, non potrà esservi al-

tra coppia acceleratrice, fuorchè quella prodotta dalle forze centrifughe; ed in conseguenza otterremo in questo caso le equazioni del moto, pareggiando quelle tre derivate alle componenti di $G\theta \operatorname{sen} i$ prese secondo i medesimi assi.

Per ottenere i valori di queste componenti, immaginiamo condotte per l'origine due rette, l'una parallela all'asse della coppia impulsiva, l'altra all'asse della rotazione θ dopo il tempo t: il piano di queste due rette sarà quello della coppia $G\theta \operatorname{sen} i$ al termine dello stesso tempo. Sulla parallela all'asse della coppia impressa prendiamo il punto $\left(\frac{L}{G}, \frac{M}{G}, \frac{N}{G}\right)$, ed il punto (p, q, r) sull'altra: il piano che passerà per questi due punti e per l'origine, sarà definito dall'equazione

$$x + Dy + Ez = 0,$$

i cui coefficienti D ed E saranno determinati, sostituendovi successivamente le coordinate dei due punti che abbiamo considerato. Così otterremo

$$D = \frac{Np - Lr}{Mr - Nq}, \quad E = \frac{Lq - Mp}{Mr - Nq};$$

e l'equazione del piano della coppia $G\theta \operatorname{sen} i$ sarà

$$(Mr - Nq)x + (Np - Lr)y + (Lq - Mp)z = 0.$$

L'asse di essa sarà dato dalle due equazioni

$$y = \frac{Np - Lr}{Mr - Nq}x, \quad z = \frac{Lq - Mp}{Mr - Nq}x;$$

e gli angoli α, β γ che farà cogli assi principali si avranno mercè le equazioni

$$\cos\alpha = \frac{Mr - Nq}{\sqrt{(Mr - Nq)^2 + (Np - Lr)^2 + (Lq - Mp)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{Np - Lr}{\sqrt{(Mr - Nq)^2 + (Np - Lr)^2 + (Lq - Mp)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Lq - Mp}{\sqrt{(Mr - Nq)^2 + (Np - Lr)^2 + (Lq - Mp)^2}}.$$

Or nelle espressioni

$$G\theta \operatorname{sen} i \cos\alpha, \quad G\theta \operatorname{sen} i \cos\beta, \quad G\theta \operatorname{sen} i \cos\gamma$$

che rappresentano le componenti della coppia acceleratrice secondo gli assi, sostituendo a $G\theta$ l'espressione equivalente

$$\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)(p^2 + q^2 + r^2)}\,,$$

a sen i il suo valore

$$\sqrt{1 - \cos^2 i} = \sqrt{\left(\frac{(Lp + Mq + Nr)}{G\theta}\right)^2}\,,$$

e ponendo invece di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i valori precedenti, avremo

$$G\theta \operatorname{sen} i \cos\alpha = Mr - Nq = (B - C)\,qr$$
$$G\theta \operatorname{sen} i \cos\beta = Np - Lr = (C - A)pr$$
$$G\theta \operatorname{sen} i \cos\gamma = Lq - Mp = (A - B)pq$$

Non essendovi dunque azione acceleratrice esterna, le equazioni del moto di rotazione saranno

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)pr$$
$$C\frac{dr}{di} = (A - B)pq.$$

Che se poi il corpo fosse sottoposto ad un'azione acceleratrice esterna, allora (chiamandone X, Y, Z le componenti secondo gli assi principali) in conseguenza della legge di composizione delle rotazioni, analoga a quella delle forze, bisognerebbe aggiungere ai secondi membri delle equazioni precedenti le coppie prodotte dalle nuove forze acceleratrici, e le equazioni del moto di rotazione diverrebbero

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + \int (Zy - Yz)dm$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)pr + \int (Xz - Zx)dm$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + \int (Yx - Xy)dm.$$

270. Dopo aver esaminato il moto di un corpo, sia perfettamente libero, sia che abbia un punto fisso; non ci rimane a considerare che il moto di un corpo girevole intorno ad un asse fisso.

Prendendo per asse delle z quello di rotazione, la sua resistenza annullerà l'azione sì delle forze P e P_1 (n° 250 a 254) che delle coppie K e K_1. Resterà soltanto la coppia N, la quale quando non contenga elemento di forza continua (come sarebbe di un grave spinto a rotare intorno ad un asse condotto pel suo centro di gravità) produrrà la rotazione uniforme

$$\theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$$

Che se poi le forze motrici fossero continue, allora essendo θr la velocità della molecola, di cui r è la distanza dall'asse di rotazione, sarà $\frac{d\theta}{dt}\,rdm$ (n° 152) la forza corrispondente, ed avremo

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{N}{\int r^2 dm}. \quad (5)$$

271. Prendiamo ad esempio un grave che mobile intorno ad un asse orizzontale che non passi pel centro di gravità, venga abbandonato a se stesso dopo essere stato allontanato di un certo angolo dalla verticale di equilibrio. Sia xOy (*fig. 138*) il piano menato pel centro di gravità del corpo perpendicolarmente all' asse di rotazione; ed in esso siano condotte la verticale Oy e l' orizzontale Ox. Sia G il luogo del centro di gravità al termine del tempo t, e chiamiamo

φ l'angolo GOx. Ponendo $OG = a$, sarà

$$Mg.\,OV = Mga\cos\varphi$$

il momento della coppia prodotta dal peso Mg del corpo. E rappresentando con Mh^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse condotto pel centro di gravità parallelamente a quello di rotazione, avremo

$$\int r^2 dm = M(h^2 + a^2).$$

Sostituendo nell'equazione (5) questo valore a $\int r^2 dm$, e $\frac{d\varphi}{dt}$ a $\frac{d\theta}{dt}$, avremo

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{g\cos\varphi}{a + \frac{h^2}{a}} = \frac{g\cos\varphi}{l}$$

facendo $a + \frac{h^2}{a} = l$.

Moltiplichiamo per $2d\varphi$ i due membri dell'ultima equazione, ed avremo

$$\frac{2d\varphi d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g\cos\varphi d\varphi}{l};$$

donde

$$l^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2g\,\mathrm{sen}\varphi + C.$$

Chiamando α l'angolo che rende nulla la velocità $\frac{d\varphi}{dt}$ si avrà $C = -2gl\,\mathrm{sen}\alpha$, e l'integrale completo sarà dato dell'equazione

$$\frac{l^2 d\varphi^2}{dt^2} = 2gl(\mathrm{sen}\varphi - \mathrm{sen}\alpha).$$

Or se in vece degli angoli che la OG forma un Ox, consideriamo quelli che la stessa OG forma colla verticale Oy, l'equazione ultima diverrà identica quella ottenuta nel n° 209 come espressione della legge di oscillazione di un pendolo semplice di lunghezza l.

Dunque per un corpo oscillante intorno ad un asse orizzontale, qual' è il caso di ogni pendolo attuabile, avvi una retta parallela all' asse di rotazione, la quale è luogo delle molecole che intorno al medesimo asse oscillerebbero sincronamente all' intero corpo. Questa retta nomasi *asse di oscillazione*, e *centro di oscillazione* dicesi il punto in cui l'asse incontra il piano che perpendicolarmente alla linea fissa è menato pel centro di gravità.

Laonde per applicare ad ogni pendolo reale, o *pendolo composto*, le leggi trovate nel n° 208 rispetto al pendolo semplice, bisogna determinare il centro di oscillazione del pendolo composto, e sostituire la distanza di questo punto dall' asse di rotazione nelle formole del n° indicato.

272. Dall' equazione

$$l = a + \frac{h^2}{a}$$

si deduce — 1° che il centro di oscillazione è sempre più lontano dall' asse di rotazione che il centro di gravità.

— 2° Che prendendo per asse di rotazione quello di oscillazione, il centro di gravità ne sarà distante di $\frac{h^2}{a}$; ed aggiungendo a questa distanza il quoziente a che si ottiene dividendo h^2 per $\frac{h^2}{a}$, avremo la distanza del nuovo asse di oscillazione espressa da

$$a + \frac{h^2}{a},$$

vale a dire identica alla prima. Dunque gli assi di rotazione ed oscillazione sono assi conjugati.

— 3°. Che riguardando a come variabile, e cercando il valore minimo di $l = a + \frac{h^2}{a}$, troveremo $a = h$, Or il minimo valore di l corrispondendo al massimo di $\frac{d\theta}{dt}$, ne segue che per un dato pendolo composto si avrà l' oscillazione più

celere allorchè il centro di gravità dista dall' asse di rotazione, quanto è il *braccio d' inerzia* [1] del pendolo rispetto allo stesso centro. Così ponendo eguale a 5 il braccio d'inerzia, e supponendo che le distanze dell' asse di rotazione dal centro di gravità siano 5, 1, $\frac{1}{5}$, avremo per valori di l i numeri 10, 26, $125 + \frac{1}{5}$. Donde si rileva come la lentezza delle oscillazioni di una bilancia sia argomento della vicinanza del centro di gravità all' asse di rotazione, e quindi del grado di sensibilità dell' apparecchio.

273. La rotazione $\theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$, prodotta in un corpo mobile intorno ad un asse fisso dall' azione di una coppia N normale all' asse, risulterebbe identica per lo stesso corpo supposto libero, quando all' azione di N si aggiungesse quella di un' altra coppia K e di una forza P, convenientemente determinate (n° 250). Sia OZ (*fig. 139*) l' asse immobile di rotazione, e siano OP ed OK le grandezze e direzioni della forza P e della coppia K che insieme alla coppia N produrebbero sul corpo libero la stessa rotazione θ intorno al medesimo asse OZ; che divenuto così asse di spontanea rotazione non soffrirebbe alcuna spinta dall'azione della forza e delle coppie impresse. Determinate le grandezze e direzioni di OP ed OK, immaginiamo applicate all' asse immobile OZ le due forze eguali ed opposte, OP, OP' e le due coppie anche eguali ed opposte OK ed OK', le cui azioni equilibrate non produrranno veruna spinta sull' asse di rotazione. Ma per ipotesi le coppie N e K e la forza P produrrebbero una rotazione spontanea intorno all' asse OZ; dunque per l' azione della sola coppia N si produrranno le due spinte — P e — K. E perciò volendo con una percossa far girare un corpo intorno ad un asse immobile senza che l' asse patisse urto alcuno, sarà ne-

[1] La distanza media h dall'asse del momento d'inerzia, che rende soddisfatta l' equazione $\int r^2 dm = Mh^2$, è denominata *braccio d' inerzia* dal Poinsot.

cessario che l'azione della percossa equilibri la forza $-$ P e la coppia $-$ K.

Perchè resti equilibrata la forza $-$ P, la quale è perpendicolare al piano che passa pel centro di gravità e per l'asse di rotazione (n° 251), è d'uopo che la direzione della percossa sia perpendicolare allo stesso piano, e che in conseguenza la coppia da essa prodotta, sia normale all'asse di rotazione. Chiamando Q l'intensità della percossa e δ la sua distanza dall'asse di rotazione, $Q\delta$ sarà il suo momento, e

$$\theta = \frac{Q\delta}{\int r^2 dm}$$

ne sarà la velocità prodotta. Ma dovendo essere $Q = P = Ma\theta$ (n° 251), la sostituzione di $Ma\theta$ a Q nell'equazione precedente ci darà

$$\delta = \frac{\int r^2 dm}{Ma} = \frac{M(a^2+h^2)}{Ma} = a + \frac{h^2}{a};$$

vale a dire che la distanza della percossa dall'asse di rotazione dovrà essere eguale a quella del centro di oscillazione del corpo rispetto al medesimo asse.

Or la coppia $Q\delta$ essendo normale all'asse di rotazione, non potrà dare componente secondo il medesimo asse, per cui passa il piano della coppia $-$ K (n° 252). Dunque l'asse di rotazione, non potendo esser sottratto dalla spinta $-$ K che nella sola ipotesi di $K = 0$, dovrà essere necessariamente un asse principale.

In conseguenza, riassumendo, avremo che la percossa, la quale dà moto ad un corpo intorno ad un asse fisso, non produrrà urto sull'asse, quando siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1.ª La direzione della percossa dovrà essere perpendicolare al piano che passa pel centro di gravità e per l'asse di rotazione.

2.ª La sua distanza dall'asse dovrà pareggiare quella del

centro di oscillazione rispetto al medesime asse ; ed in conseguenza sarà infinita, quando l' asse di rotazione passerà pel centro di gravità del corpo.

3.ª L' asse di rotazione dovrà essere un asse principale rispetto al punto in cui incontra il piano della coppia prodotta dalla percossa.

Il punto , in cui la direzione della percossa così definita incontra il piano menato pel centro di gravità e per l' asse di rotazione, dicesi *centro di percossa.* Dunque l' esistenza di un centro di percossa suppone necessariamente una mobilità intorno ad un asse principale che non passi pel centro di gravità del corpo.

CAPO NONO.

Del moto relativo.

Introduzione — A che si riducono tutti i problemi sul moto relativo — Determinazione del moto di un punto rispetto ad un sistema di assi trasportati parallelamente a loro stessi. Formole che danno la celerità relativa in funzione della celerità assoluta e di quella dell' origine. Conseguenze delle formole. Equazioni del moto relativo nell' ipotesi di semplice traslazione degli assi. Caso in cui il moto degli assi è dovuto a forze impulsive: applicazione ad un problema di movimento centrale. Dimostrazione geometrica della dipendenza che il moto relativo ha dall' assoluto e da quello dell' origine — Determinazione del moto relativo ad un sistema di assi comunque trasportati nello spazio. Equazioni generali del moto relativo. Loro applicazione — 1° a determinare la traiettoria apparente descritta da un grave nel vuoto, avesse o pur no velocità iniziale — 2° a determinare l' influenza che la rotazione terrestre esercita sulle oscillazioni di un pendolo.

274. Finora abbiamo supposto che gli assi coordinati, a cui va riferito il moto di traslazione di un corpo, fossero immobili nello spazio assoluto, ma potrebbero invece avervi moto secondo una data legge, ed allora le coordinate, che dovranno definire il luogo del mobile dopo un dato tempo, saranno diverse secondochè riferite alla posizione iniziale degli assi, ovvero a quella che avranno in un certo istante della durata. Avremo dunque a considerare due traiettorie del mobile, l' una reale nello spazio assoluto, l' altra apparente all' osservatore che trasportato dal moto degli assi si crede in perfetta quiete. Così la verticale che segna la libera discesa di un grave, non è che la sua traiettoria relativa all'osservatore ch' è conscio di star fermo; mentre la vera linea percorsa dal grave è una curva definita dall' azione congiunta della gravità terrestre e delle forze produttrici del moto diurno ed annuo del nostro pianeta.

275. Tutti i problemi relativi al moto apparente di un corpo, possono riassumersi nei due seguenti.

1° *Dato il moto assoluto di un corpo, determinare quello che avrà rispetto ad un sistema di assi, il quale si muove con una data legge.*

2° *Dato il moto di un corpo rispetto ad un sistema di assi, che si muove con una data legge, determinare la vera traiettoria nello spazio assoluto.*

276. Sia riferito il luogo del mobile M (*fig. 140*) agli assi $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ che supponiamo muoversi parallelamente agli assi fissi Ax, Ay, Az in modo che l'origine occupando il luogo O al termine del tempo t, vada poi successivamente in O', O'', ecc. al finire dei tempi t', t'', ecc. Sia inoltre MS la traiettoria descritta dal mobile nello spazio assoluto; e cerchiamo sotto qual forma ed in qual luogo essa apparirà ad un osservatore trasportato dal moto dell'origine O.

Se mentre questo punto si avanza da O in O' ed O'', il mobile andasse da M in N ed N', descrivendo le linee MN, NN' rispettivamente eguali e parallele ad OO' ed O'O'', egli è chiaro che il mobile dovrebbe sembrare in perfetta quiete all'osservatore trasportato dal moto dell'origine. Ma il mobile va in vece da M in M' ed M'', quando l'origine procede da O in O' ed O''; in conseguenza se l'osservatore avesse la conscienza del suo moto, dovrebbe vederlo progredire da N in M' e da N' in M'', mentre va realmente da M in M' e da questo punto in M''. Ma l'osservatore è conscio non del moto ma della sua quiete; perciò dovrà vedere le linee NM' ed N'M'' trasportate parallelamente a loro stesse in Mm' ed Mm'', ed il mobile che gli appariva in M al termine del tempo t, gli apparirà in m' ed m'' al finire dei tempi t' e t''.

Or siano x y z le coordinate del punto M ed x' y' z' quelle del punto O rispetto agli assi Ax, Ay, Az; e quanto agli assi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ siano ξ, η, ζ le coordinate di M. Avremo.

$$(1) \qquad \xi = x - x', \quad \eta = y - y', \quad \zeta = z - z';$$

donde

$$(2) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}.$$

Dunque le componenti della celerità relativa sono eguali alle componenti della celerità assoluta, diminuite delle analoghe componenti della celerità dell' origine.

277. Da questo teorema deriva

— 1° Che se il mobile fosse in quiete relativamente all' origine O, ξ η e ζ sarebbero costanti; e le equazioni (2) divenendo

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt}$$

ci dicono che allora la celerità assoluta del mobile sarebbe eguale a quella dell' origine. Così pel solo fatto della rotazione diurna tutti gli obbietti esistenti sulla superficie terrestre hanno una velocità eguale a quella del parallello su cui riposano. E se per avventura la rotazione della terra si arrestasse in un istante, i corpi che giacciono sulla sua superficie, ne sarebbero tangenzialmente lanciati colla velocità che posseggono; la quale essendo per l' equatore di 452 metri a secondo, ivi i corpi fuggerebbero più celeramente di un proietto nell' uscire da un cannone da 24.

— 2° Che se il mobile fosse in assoluta quiete, la sua velocità apparente sarebbe eguale ed opposta a quella dell' origine. Così il lido sembra fuggiro dal navigante colla stessa velocità con cui questi se ne allontana. Similmente avviene che il sole ci sembri descrivere nel corso di un anno un ellissi avente uno dei fuochi nel centro della terra, mentre in realtà è la terra che intorno al centro del sole come fuoco descrive un' ellissi eguale ed egualmente situata. Ed in vero sia A B C D (*fig. 141*) l' ellissi descritta dalla terra intorno al centro del sole situato nel fuoco S; e poniamo che si cominci ad osservarne il moto apparente nell' istante in cui la terra occupa l' estremità C dell' asse maggiore. Egli è chiaro che la terra percorrendo gli archi C*e*, *em*, *m*D, DA, l' osservatore dovrà nello stesso tempo vedere il sole camminare per gli archi, eguali e simmetrici ai primi, Sϵ, $\epsilon\mu$, $\mu\delta$, $\delta\alpha$, di

un' ellissi eguale alla vera ed egualmente situata intorno al punto C come fuoco. Da qualunque altro punto dell' orbita terrestre si fosse dato cominciamento all' osservazione del moto, quel punto sarebbe divenuto fuoco dell' ellissi apparente; pel punto D, per esempio, si avrebbe l' ellissi $S\alpha'\beta'\gamma'$. E tutte queste ellissi eguali, ed egualmente situate nel piano dell' ecclittica, dovranno necessariamente confondersi in una sola per l' osservatore che si crede immobile nello spazio assoluto.

278. Prendendo le derivate seconde delle equazioni (1), abbiamo

$$(3) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Or chiamando φ, f ed f' le forze

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right), \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right), \left(\frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}, \frac{d^2z'}{dt^2}\right);$$

ed essendo pel teorema del parallelogrammo la proiezione della risultante eguale alla somma algebrica delle proiezioni delle componenti, ne segue che la forza φ dovrà essere risultante di f e $-f'$; vale a dire che il moto del punto rispetto all' origine in movimento è identico a quello che avrebbe rispetto alla stessa origine ridotta ad assoluta quiete, se alla forza che il punto possiede si aggiungesse in opposta direzione una forza eguale e parallela a quella dell' origine. Basterà dunque introdurre l' espressione di questa forza nelle equazioni generali del moto assoluto di un punto, perchè esse divengano immediatamente applicabili al moto relativo ad assi animati da sola traslazione.

E se nelle equazioni (3) passiamo nei primi membri i termini negativi che si trovano nei secondi, troveremo che il moto assoluto di un punto è risultante del suo moto relativo e di quello dell' origine.

279. Se le forze, alle quali è dovuto il moto dell' origine, fossero impulsive, le derivate $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$ sarebbe-

ro nulle; e le equazioni del moto relativo diverrebbero identiche a quelle del moto assoluto, la sola determinazione delle costanti rimanendo diversa nel processo dell' integrazione. Così se nel problema del n° 195 poniamo che il centro di attrazione si muova uniformemente colla velocità w, la traiettoria relativa sarà tuttavia definita dall' equazione

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C - 2\left(\frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r}\right);$$

ma la còstante C che nell' ipotesi di un centro fisso rappresenta il valore iniziale v_0^2 di $\frac{ds^2}{dt^2}$, dovrà in vece essere eguale a $(v_0 - \text{w}\cos\beta)^2$ nel moto relativo, β indicando l'angolo che la velocità w dell' origine farà con r_0. Sostituendo questo valore di C nell' equazione (8) dello stesso numero, avremo la traiettoria relativa espressa da

$$\mu^2\eta^2 - \left[(v_0 - \text{w}\cos\beta)^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right]\xi^2 - 2c^2\xi\sqrt{\mu^2 + c^2\left[(v_0 - \text{w}\cos\beta)^2 - 2\frac{\mu}{r_0}\right]} - c^4 = 0;$$

e secondochè $(v_0 - \text{w}\cos\beta)^2 - 2\frac{\mu}{r_0}$ sarà positivo, negativo o nullo, la curva relativa al centro avrà forma di ellissi, d'iperbole o di parabola.

Or se il centro di attrazione fosse immobile, avremmo $\text{w} = 0$; ed il binomio $(v_0 - \text{w}\cos\beta)^2 - 2\frac{\mu}{r_0}$ che supponiamo negativo, potrebbe assumere un valore positivo o nullo nell' ipotesi di $\text{w} = 0$. Quindi la traiettoria relativa iperbolica avrebbe potuto invece essere ellittica o parabolica, se il centro di attrazione fosse stato immobile; e così alcune delle comete, apparse una sola volta nel sistema solare, colla stessa velocità iniziale avrebbero potuto forse descrivere delle orbite ellittiche, se il sole non avesse avuto movimento di traslazione.

280. I teoremi sulla determinazione del moto assoluto di un punto in funzione del suo moto relativo e viceversa, che abbiamo dedotto dall' equazione (3), si possono facilmente di-

mostrare mercè una semplice costruzione geometrica. Supponendo infinitesimo l'intervallo di tempo, in cui il mobile passa da M in M' (*fig. 140*), le linee MN, MM', Mm' potranno riguardarsi come rette. Avremo così MM' diagonale del parallelogrammo Nm'; vale a dire che il moto assoluto è risultante del moto relativo e di quello dell'origine. E prolungando la NM di altrettanto in n, avremo ancora che Mm' è diagonale del parallelogrammo M'n; ossia che il moto relativo è risultante del moto assoluto, e di un moto eguale ed opposto a quello dell'origine.

281. Abbiamo finora supposto negli assi una pura traslazione; passiamo a considerare gli effetti di una semplice rotazione intorno ad una retta data. Sia A B (*fig. 142*) questa retta, e siano M, M', M'' le posizioni del mobile nello spazio assoluto dopo i tempi t, t', t''. Se mentre il mobile va da M in M' ed M'', il sistema degli assi giri per gli angoli MCN, NCN', l'osservatore trasportato da questa rotazione vedrà il mobile procedere da N in M' e da N' in M''. Nè le linee NM' ed N'M'' gli appariranno distinte nello spazio; ma per lo stato di quiete, di cui è conscio, vedrà quelle linee trasportate tutte sopra una sola M$m'm''$, che sarà per lui la traiettoria percorsa del mobile.

Egualmente che nel moto di traslazione qui avremo che supponendo infinitesimo l'intervallo di tempo $t'-t$, sarà il moto relativo Mm' risultante del moto assoluto MM' e di un moto Mn eguale ed opposto a quello degli assi. Quindi se il mobile fosse in assoluta quiete, la sua rotazione relativa sarebbe eguale ed opposta a quella dell'osservatore. Così a noi trasportati dalla rotazione della terra d'occidente in oriente, sembra che la volta celeste giri viceversa da oriente in occidente.

Poichè ogni rotazione può riguardarsi come risultante di una traslazione e di una rotazione eguale e parallela alla data (n° 233); così l'ipotesi di solo moto rotatorio nel sistema degli assi coordinati si trasfonde in quella di un moto qualun-

que; e perciò il calcolo che nel n° seguente ci faremo ad esporre per qualsivoglia trasposizione degli assi, converrà tuttavia all'ipotesi di sola rotazione.

282. Prendiamo per origine il luogo M (*fig.* 143) avuto dal mobile sulla traiettoria relativa AB nella fine del tempo t; e poniamo che dopo il tempo $t+dt$ il mobile occupi il luogo M_1, mentre per un certo moto degli assi l'origine è passata in M' e la AB in $A_1 B_1$. Egli è chiaro che la AB avrebbe preso la stessa giacitura $A_1 B_1$, se fosse da prima venuta in A'B' per traslazione degli assi, e poi fosse passata in $A_1 B_1$ rotando intorno ad un asse CD convenientemente menato pel luogo M' dell'origine.

Condotte pel punto M le tangenti alla traiettoria AB ed alla linea MM' descritta dall'origine nel tempo dt, si prendano su esse tangenti le parti $MP = vdt$ ed $MN = v'dt$, v e v' indicando la velocità relativa del mobile, e l'assoluta dell'origine al termine del tempo t. Compiuto il parallelogrammo MPQN, si comprende che nell'ipotesi di semplice traslazione degli assi e senza intervento di verun'azione acceleratrice, il luogo del mobile dopo il tempo $t+dt$ dovrebb'essere nel punto Q. Ma prendendo sulla A'B' la $M'\mu = MM''$, che si suppone essere lo spazio percorso dal mobile nel tempo dt sulla traiettoria AB, sarebbe μ il luogo del mobile al termine dello stesso tempo; vi sarebbe stato dunque il deviamento $Q\mu$ dovuto all'azione acceleratrice $\frac{2Q\mu}{dt^2}$ (n° 167).

Si congiunga P con M'', si conduca QS eguale e parallela a PM'', e si unisca S con μ; sarà $S\mu$ eguale e parallela ad NM'. Or pel teorema del poligono delle forze (n° 16) avremo $\frac{2Q\mu}{dt^2}$ risultante di $\frac{2QS}{dt^2} = \frac{2PM''}{dt^2}$ e di $\frac{2S\mu}{dt^2} = \frac{2NM'}{dt^2}$. Ma il vero luogo del mobile dopo il tempo $t+dt$ essendo in M_1, il deviamento assoluto sarà stato QM_1, prodotto dalla forza $\frac{2QM_1}{dt^2}$, la quale è risultante delle tre

$$\frac{2PM''}{dt^2}, \quad \frac{2NM'}{dt^2}, \quad \frac{2\mu M_1}{dt^2}.$$

Dal punto μ si conduca la μD perpendicolare all' asse CD, intorno al quale rotando la A'B' colla celerità angolare θ è venuta a combaciare con A_1 B_1 al termine del tempo dt. Sarà

$$\mu M_1 = \mu D.\theta dt;$$

e chiamando φ l' angolo μM'D che la direzione M'μ della celerità relativa forma coll' asse di rotazione CD, avremo

$$\mu D = M'\mu.\text{sen}\varphi = vdt.\text{sen}\varphi;$$

quindi

$$\mu M_1 = \mu D.\theta dt = v\theta\text{sen}\theta dt^2,$$

e

$$\frac{2\mu M_1}{dt^2} = 2v\theta\text{sen}\varphi.$$

Quest' ultima azione acceleratrice è sempre diretta nel senso della rotazione degli assi coordinati, e perpendicolarmente al piano che passa per la direzione della celerità relativa e per l' asse istantaneo CD.

Or pel teorema del poligono delle forze se $\frac{2QM_1}{dt^2}$ è risultante delle tre

$$\frac{2QS}{dt^2}, \quad \frac{2S\mu}{dt^2}, \quad \frac{2\mu M_1}{dt^2},$$

sarà del pari $\frac{2QS}{dt^2}$ risultante di

$$\frac{2QM_1}{dt^2}, \quad \frac{2M_1\mu}{dt^2}, \quad \frac{2\mu S}{dt^2},$$

ossia di

$$\frac{2QM_1}{dt^2}, -\frac{2\mu M_1}{dt^2}, -\frac{2S\mu}{dt^2}.$$

Vale a dire che l' azione acceleratrice svolta nel moto rela-

tivo durante il tempo dt, è risultante di azione analoga prodotta nel moto assoluto, e di un' altra eguale ed opposta a quella che si genera nel moto degli assi.

283. Le componenti dell' accelerazione assoluta $\frac{2QM_t}{dt^2}$ essendo

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

e

$$-\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad -\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad -\frac{d^2z'}{dt^2}$$

quelle di $-\frac{2S\mu}{dt^2}$; ne segue che per comporre le equazioni generali del moto relativo ad un sistema di assi, che sia comunque trasportato nello spazio, bisognerà definire le componenti di $-\frac{2\mu M_t}{dt^2} = -2v\theta\operatorname{sen}\varphi$.

Siano α, β, γ gli angoli che la direzione di $2v\theta\operatorname{sen}\varphi$ forma cogli assi in moto ξ, η, ζ; e p, q, r le componenti della rotazione θ secondo i medesimi assi. Dovendo la direzione di $2v\theta\operatorname{sen}\varphi$ esser perpendicolare a quella della velocità relativa ed all' asse della rotazione θ, dovranno esser soddisfatte le due equazioni

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dt}\cos\alpha + \frac{d\eta}{dt}\cos\beta + \frac{d\zeta}{dt}\cos\gamma = 0\ ;$$

dalle quali facilmente si deducono le due altre

$$\frac{\cos\alpha}{q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}} = \frac{\cos\beta}{r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}} = \frac{\cos\gamma}{p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}},$$

che insieme alla terza

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ci daranno

$$\mathrm{D}\cos\alpha = q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}, \quad \mathrm{D}\cos\beta = r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}, \quad \mathrm{D}\cos\gamma = p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt},$$

ponendo per brevità

$$\mathrm{D} = \sqrt{\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right)^2}.$$

Svolgendo i quadrati esistenti sotto il segno radicale, e comparando il polinomio, che se ne ottiene, al prodotto

$$\theta^2 v^2 = (p^2 + q^2 + r^2)\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right),$$

si troverà

$$\mathrm{D} = \sqrt{v^2\theta^2 - \left(p\frac{d\xi}{dt} + q\frac{d\eta}{dt} + r\frac{d\zeta}{dt}\right)^2}.$$

Ma'

$$p\frac{d\xi}{dt} + q\frac{d\eta}{dt} + r\frac{d\zeta}{dt} = v\theta\cos\varphi;$$

sarà dunque

$$\mathrm{D} = \sqrt{v^2\theta^2(1 - \cos^2\theta)} = v\theta\operatorname{sen}\varphi,$$

e le componenti della forza $2v\theta\operatorname{sen}\varphi$ saranno espresse da

$$2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right), \quad 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right), \quad 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right).$$

Quindi le tre equazioni generali del moto di un punto materiale relativamente ad un sistema di assi comunque trasportati nello spazio, saranno

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2} - 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2} - 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

284. Applichiamo queste equazioni ai due seguenti problemi.

I.

Determinare il moto apparente di un proietto nel voto, avendo riguardo al moto della terra.

Dei due contemporanei movimenti del nostro pianeta non avremo a considerare nel problema attuale che il solo moto di rotazione intorno all' asse polare; poichè il moto di traslazione, con cui la terra compie il suo giro intorno al sole, non altrimenti potrebbe influire sulla traiettoria relativa del proietto, se non per la differenza con cui il sole agisce sul proietto e sul globo terrestre. Or questa differenza come piccolissima non può produrre effetto sensibile.

Prendiamo per origine il punto di partenza del mobile, che supponiamo nell' emisfero boreale; nella verticale di quel punto sia l'asse delle z; quello delle y proceda verso il nord, e verso est quello delle x. La posizione iniziale di questi assi sia considerata come quella delle x, y, z; ed il luogo che per effetto della rotazione terrestre prenderanno dopo il tempo t, riguarderemo come quello delle ξ, η, ζ.

Le forze che hanno per componenti $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, sono la gravità terrestre e la forza centrifuga. Chiamando λ la latitudine, θ la celerità della rotazione terrestre ed h la distanza del proietto dall' asse polare; sarà la forza centrifuga

$$f = \theta^2 h,$$

e le sue componenti secondo gli assi saranno

$$0, \; \theta^2 h \operatorname{sen}\lambda \;, \; \theta^2 h \cos\lambda.$$

Rispetto ai medesimi assi la gravità g, risultante dell' attrazione terrestre e della forza centrifuga, ci darà le componenti

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \,, \; \frac{d^2y}{dt^2} = \theta^2 h \operatorname{sen}\lambda, \; \frac{d^2z}{dt^2} = g + \theta^2 h \cos\lambda \,.$$

La forza poi, di cui sono componenti $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$, e che produce il deviamento dell' origine, non essendo altra che la forza centrifuga, avrà le stesse componenti

$$0,\ \theta^2 h \operatorname{sen}\lambda\ ,\ \theta^2 h \cos\lambda\ ;$$

quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}=0\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y'}{dt^2}=0\ ,\ \frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d^2z'}{dt^2}=g\,.$$

In fine le componenti della rotazione θ secondo gli assi delle ξ, η, ζ saranno

$$p=0\ ,\ q=-\theta\cos\lambda\ ,\ r=\theta\operatorname{sen}\lambda.$$

E tutti questi valori sostituiti nelle equazioni (4) ci daranno per la determinazione della traiettoria relativa del proietto le tre equazioni

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2}=2\theta\cos\lambda\,\frac{d\zeta}{dt}+2\theta\operatorname{sen}\lambda\,\frac{d^2\eta}{dt^2}\\ &\frac{d^2\eta}{dt^2}=-2\theta\operatorname{sen}\lambda\,\frac{d\xi}{dt}\\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2}=g-2\theta\cos\lambda\,\frac{d\xi}{dt}\,. \end{aligned}\right.$$

Chiamando a, b, c le componenti della celerità impressa al proietto, la prima integrazione delle equazioni precedenti ci darà

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt}=a+2\theta\cos\lambda.\zeta+2\theta\operatorname{sen}\lambda.\eta\\ &\frac{d\eta}{dt}=b-2\theta\operatorname{sen}\lambda.\xi\\ &\frac{d\zeta}{dt}=c+gt-2\theta\cos\lambda.\xi. \end{aligned}\right.$$

Sostituendo nella prima delle equazioni (5) i valori di

$\frac{d\zeta}{dt}$ e $\frac{d\eta}{dt}$ dati dalle due ultime equazioni (6), avremo

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\theta\cos\lambda(c + gt - 2\theta\cos\lambda.\xi) + 2\theta\text{sen}\lambda(b - 2\theta\cos\lambda.\xi).$$

Or essendo di 86164 secondi la durata della rotazione della terra, sarà

$$\theta = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729\ ;$$

saranno perciò trascurabili nelle equazioni precedenti tutti i termini contenenti θ^2, e così avremo

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\theta\cos\lambda(c + gt) + 2\theta\text{sen}\lambda.b\ ;$$

donde

(7) $\qquad \xi = at + \theta(c\cos\lambda + b\text{sen}\lambda)t^2 + \frac{1}{3}\theta g\cos\lambda.t^3.$

E limitandoci al medesimo grado di approssimazione porremo $\xi = at$ nelle due ultime equazioni (6), che ci daranno

(8) $\qquad \eta = bt - \theta\text{sen}\lambda.at^2$

(9) $\qquad \zeta = ct + (\frac{1}{2}g - \theta a\cos\lambda)t^2.$

Se in quest'ultima equazione facciamo $z = 0$, avremo $t = 0$, ovvero $c + (\frac{1}{2}g - \theta a\cos\lambda)t = 0$. Questa seconda equazione ci darà la durata del moto, ed osservando che c è negativa, avremo

$$t = \frac{c}{\frac{1}{2}g - \theta a\cos\lambda}$$

Comparando questo valore di t a quello che si otterrebbe dall'equazione (2) del n° 175, si deduce che la rotazione terrestre aumenta la durata nel moto del proietto, se il tiro è diretto alla regione orientale, e la diminuisce in vece se il proietto è lanciato verso la regione occidentale. Ma se fosse $a = 0$, vale a dire che il tiro fosse diretto nel piano

del meridiano, la rotazione terrestre sarebbe senza effetto sulla durata del moto.

Sostituendo nelle equazioni (7) ed (8) il valore di t qui sopra ottenuto, avremo, trascurando i termini in θ^2,

$$\xi_1 = \frac{2ac}{g} + \frac{4\theta c}{g^2}[bc\,\mathrm{sen}\lambda + (a^2 - \tfrac{1}{3}c^2)\cos\lambda]$$
$$\eta_1 = \frac{2bc}{g} + \frac{4\theta a}{g^2}[bc\cos\lambda - c^2\,\mathrm{sen}\lambda],$$

che saranno le coordinate del punto in cui il proietto incontrerà il piano orizzontale del punto di partenza. Sarà quindi l' ampiezza del tiro

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{2c}{g}\sqrt{(a^2 + b^2) + \frac{a\theta}{g}[a^2 + b^2 - \tfrac{1}{3}c^2]\cos\lambda}.$$

Or nell' ipotesi che la terra non avesse moto di rotazione avremmo

$$\xi_1 = \frac{2ac}{g},\ \eta_1 = \frac{2bc}{g},\ \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{2c}{g}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dunque — 1° La rotazione terrestre aumenta, diminuisce o lascia inalterata l'ampiezza del tiro, secondochè $a\,(a^2+b^2-\frac{1}{3}c^2)$ sarà positivo, negativo o nullo — 2° Ponendo $b = 0$, vale a dire che il tiro vada diretto nel piano del parallelo, e quindi

$$\eta_1 = -\frac{\theta a c^2\,\mathrm{sen}\lambda}{\frac{1}{4}g^2};$$

il proietto devierà da quel piano verso l' equatore, o verso il polo, secondochè a sarà positiva o negativa. Ed in questo caso l' ampiezza del tiro riducendosi a

$$\xi_1 = \frac{2ac}{g} + \frac{4\theta c}{g^2}(a^2 - \tfrac{1}{3}c^2),$$

è chiaro che vi sarà aumento o diminuzione di ampiezza,

secondochè sarà $3a^2$ maggiore o minore di c^2. Or chiamando α l'angolo che la velocità impressa v_0 forma coll'orizzontale del punto di partenza, abbiamo

$$3a^2 - c^2 = v_0^2(3\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha);$$

dunque vi sarà aumento o diminuzione di ampiezza, secondochè sarà α minore o maggiore di 60°.

285. Se nelle equazioni (7), (8) e (9) poniamo $a = b = c = 0$, esse rappresenteranno il moto apparente di un grave che liberamente discende nello spazio vuolo. Avremo così le equazioni

$$\xi = \tfrac{1}{3}\theta g\cos\lambda . t^3, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dalle quali eliminando t risulterà l'equazione della traiettoria apparente

$$\xi = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{g}} . \theta\cos\lambda . \zeta^{\frac{3}{2}} .$$

La linea dunque apparentemente percorsa dal grave è un arco di parabola cubica, la quale incontra il piano orizzontale dell'osservatore in un punto delle ξ positive, ed in conseguenza a levante del piede della perpendicolare. E la quantità di questo deviamento si avrà dall'equazione precedente, dopo aver sostituito a ζ l'altezza della caduta.

Un tale deviamento è purtuttavia piccolissimo rispetto all'altezza, donde il grave discende, poichè la funzione che n'esprime il valore contiene θ come fattore. Così ponendo $\lambda = 51°$ e l'altezza $= 158^m,5$, si ottiene il deviamento

$$\xi = 0^m,0276,$$

valore prossimo a 0^m, 0283, che Reich ottenne da una serie di sperimenti eseguiti in un pozzo di miniera a Freyberg sotto la latitudine e dall'altezza qui sopra notate.

386. Esaminiamo ancora il moto apparente di un grave spinto verticalmente in alto colla velocità iniziale v_0. Avremo in questo caso $a = b = 0$, $c = -v_0$; quindi le equa-

zioni (7), (8) e (9) diverranno

$$\xi = -v_0 \theta \cos\lambda\, t^2 + \tfrac{1}{3}\theta g \cos\lambda\, t^3$$
$$\lambda = 0,\ \zeta = -v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

Essendo necessario il tempo $t = \sqrt{\frac{2\zeta_1}{g}}$ perchè il grave salisse all' altezza ζ_1 mercè la celerità impressa $v_0 = \sqrt{2g\zeta_1}$, fa d' uopo il tempo $2\sqrt{\frac{2\zeta_1}{g}}$ pel suo ritorno al luogo d' onde è partito. Sostituendo questi valori nell'espressione di ξ, avremo

$$\xi_1 = -\tfrac{8}{3}\theta\cos\lambda \sqrt{\frac{2}{g}}\, \zeta_1^{\frac{3}{2}}.$$

Vi sarà dunque un deviamento occidentale, quadruplo del deviamento orientale che si sarebbe ottenuto nella libera discesa del grave dalla medesima altezza ζ_1.

II.

Determinare l' influenza della rotazione terrestre sulle oscillazioni di un pendolo.

287. Prendiamo il punto di sospensione del pendolo come origine, e gli assi s' intendano diretti come nel problema precedente. Avremo purtuttavia una forza acceleratrice di più, ed è la tensione — T del filo, le cui componenti secondo gli assi sono $-T\frac{\xi}{l}$, $-T\frac{\eta}{l}$, $-T\frac{\zeta}{l}$, l indicando la lunghezza del pendolo. Aggiungendo questi termini ai secondi membri delle equazioni (6), avremo per la determinazione del moto apparente del pendolo

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = 2\theta\cos\lambda\, \dfrac{d\zeta}{dt} + 2\theta\,\mathrm{sen}\lambda\, \dfrac{d\eta}{dt} - T\dfrac{\xi}{l} \\[2mm] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -2\theta\,\mathrm{sen}\lambda\, \dfrac{d\xi}{dt} - T\dfrac{\eta}{l} \\[2mm] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = g - 2\theta\cos\lambda\, \dfrac{d\xi}{dt} - T\dfrac{\zeta}{l}. \end{cases}$$

Eliminando T dalle due prime equazioni si ottiene

$$\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}=-2\theta\text{sen}\lambda\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}\right)-2\theta\cos\lambda\,\frac{d\zeta}{dt}\,\eta.$$

Or se poniamo le ampiezze delle oscillazioni esser piccolissime, la variazione $d\zeta$ avvenuta nel tempo dt potrà riguardarsi come nulla; e l' ultima equazione riducendosi a

$$\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}=-2\theta\text{sen}\lambda\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}\right),$$

avrà per integrale

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=C-\theta\text{sen}\lambda(\xi^2+\eta^2).$$

Se facciamo che ξ ed η possano divenir contemporaneamente nulle, ossia se diamo moto al pendolo in modo che passi in ogni oscillazione per la verticale del punto di sospensione, allora avremo $C=0$; e l' equazione precedente, messa sotto la forma

$$\frac{\xi d\eta-\eta d\xi}{\xi^2+\eta^2}=-\theta\text{sen}\lambda.dt$$

avrà per integrale

$$\text{arctang}\,\frac{\eta}{\xi}=C-\theta\text{sen}\lambda.t$$

Ma l' arco, la cui tangente è $\frac{\eta}{\xi}$, misura l'angolo che il piano di oscillazione del pendolo forma coll' asse delle ξ; quindi chiamando φ quest' angolo e φ_0 il suo valore iniziale, avremo

$$\varphi=\varphi_0-\theta\,\text{sen}\lambda.t.$$

Dunque il piano di oscillazione del pendolo roterà uniformemente intorno alla verticale del punto di sospensione con una celerità angolare numericamente eguale alla componente della rotazione terrestre secondo la verticale, e che avrà una

direzione dipendente dal segno di *sen*λ. Sarà dunque opposta alla componente della rotazione terrestre nell' emisfero boreale, e cospirante nell' australe; in conseguenza pel primo emisfero la rotazione del pendolo procederà nel senso ***est sud ovest nord***, e nel senso ***est nord ovest sud*** pel secondo.

Purtuttavia questa uniformità di rotazione non è che approssimata, poichè essa risulta dall' aver trascurato il valore del termine $2\theta\cos\lambda\frac{d\zeta}{dt}\eta$. Ma se l' esperimento si facesse al polo, si avrebbe $\cos\lambda = 0$, e l' uniformità di rotazione avrebbe luogo qualunque fosse l' ampiezza dell' oscillazione. Ed ivi essendo $sen\lambda = 1$, la celerità di rotazione del pendolo sarebbe eguale a quella della terra, ed il piano di oscillazione ritornerebbe dopo 12 ore alla sua posizione iniziale. Nelle altre latitudini la celerità va cangiando direttamente a *sen*λ, finchè diviene nulla all' equatore, ove è $sen\lambda = 0$.

288. Finora abbiamo supposto che il moto del pendolo fosse attuato in modo che in ogni oscillazione ritornasse alla verticale del punto di sospensione. Questa ipotesi, buona a farci meglio comprendere la rotazione del piano di oscillazione, sarebbe attuata quando normalmente a questo piano fosse al pendolo impressa una velocità eguale ed opposta a quella che gli comunica la componente della rotazione terrestre secondo la verticale del punto di sospensione. Ma nel fatto l' oscillazione è conica, anzi che piana; e per definire la proiezione della traiettoria del pendolo sul piano orizzontale del luogo, noi ritorniamo alle equazioni (10) conservando l' ipotesi di un' oscillazione per archi minimi, ed in virtù della quale avremo prossimamente $\zeta = l$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$. Così la terza di quelle equazioni ci darà

$$T = g - 2\theta\cos\lambda\frac{d\xi}{dt};$$

e trascurando nelle altre due i termini $2\theta\cos\lambda\,\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{\xi}{l}$, $2\theta\cos\lambda\,\frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{\eta}{l}$ risultanti dalla sostituzione del valore di T, perchè aventi un ordine di grandezza assai piccolo rispetto a quello degli altri, quelle due equazioni diverranno

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\theta\operatorname{sen}\lambda\frac{d\eta}{dt} - g\frac{\xi}{l}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\,2\theta\operatorname{sen}\lambda\frac{d\xi}{dt} - g\frac{\eta}{l}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Or il piano di oscillazione del pendolo rotando intorno alla verticale del punto di sospensione colla celerità $-\,\theta\operatorname{sen}\lambda$, noi supporemo che il piano delle $\eta\ \xi$ partecipi dello stesso movimento, a fine di poter conoscere per ogni oscillazione la forma della sua proiezione. Sia $\eta A\xi$ *(fig. 145)* la posizione iniziale degli assi, ed yAx quella che avrà dopo il tempo t. Sia C la proiezione del pendolo dopo lo stesso tempo: supponendo α l'angolo iniziale del piano di oscillazione col piano $\zeta A\xi$, e facendo per brevità $-\,\theta\operatorname{sen}\lambda = r$, le coordinate Cm ed Am della proiezione del pendolo dopo il tempo t saranno espresse in funzione di Cm' ed Am' mercè le due equazioni

$$
\begin{aligned}
\eta &= y\cos(\alpha+rt) - x\operatorname{sen}(\alpha+rt)\\
\xi &= x\cos(\alpha+rt) + y\operatorname{sen}(\alpha+rt).
\end{aligned}
$$

Prendendo le derivate prime e seconde di queste equazioni e sostituendole nelle equazioni (11), insieme ai valori di η e ξ, avremo (trascurando i termini che avranno r^2 come fattore)

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gx}{l}\right)\cos(\alpha+rt)+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gy}{l}\right)\operatorname{sen}(\alpha+rt)=0,\\
-&\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gx}{l}\right)\operatorname{sen}(\alpha+rt)+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gy}{l}\right)\cos(\alpha+rt)=0.
\end{aligned}
$$

Queste due equazioni, elevate a quadrato e poi addizionate insieme, ci danno

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gx}{l}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gy}{l}\right)^2=0\,;$$

equazione che si risolve necessariamente nelle due

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gx}{l}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{gy}{l}=0\,,$$

le quali integrate (ved. la nota a pag. 332) ci danno

$$(12)\qquad \begin{cases} x=\mathrm{A}\operatorname{sen}t\sqrt{\frac{g}{l}}+\mathrm{B}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} \\ y=\mathrm{A}'\operatorname{sen}t\sqrt{\frac{g}{l}}+\mathrm{B}'\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases}$$

Per determinare le costanti A, B, A', B', poniamo che il pendolo allontanato nel piano $\zeta A\xi$ dalla verticale per la distanza $\xi=a$, sia poi abbandonato a se stesso senza velocità iniziale. In questa ipotesi per $t=0$ avremo

$$\frac{dx}{dt}=0\,,\ \frac{dy}{dt}=ar\,;$$

quindi

$$\mathrm{A}=0\,,\ \mathrm{B}=a\,,\ \mathrm{A}'=ar\sqrt{\frac{l}{g}}\,,\ \mathrm{B}'=0\,,$$

e le equazioni (12) diverranno

$$(13)\qquad x=a\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\,,\ y=ar\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{sen}t\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Quindi la durata di un'oscillazione sarà il valore che bisognerà dare a t, perchè da $x=a$ si passi ad $x=-a$. Questo valore è $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, che comparato a quello ottenuto nel n° 209 ci dimostra che la durata dell' oscillazione

è indipendente dalla rotazione terrestre. Eliminando t dalle equazioni (13), avremo per equazione della curva descritta dal pendolo sul piano orizzontale in movimento

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 r^2 \frac{l}{g}} = 1.$$

La curva è dunque un' ellissi, il cui centro è nella verticale del punto di sospensione, ed i cui semiassi sono a ed $ar\sqrt{\frac{l}{g}}$. Questi avendo tra loro la ragione $r\sqrt{\frac{l}{g}}$, la quale è una piccolissima frazione, l'ellissi descritta dal pendolo sarà molto allungata, e tanto più per quanto sarà minore l; dond' è che il pendolo vuol essere abbastanza lungo perchè l' ellissi sia sensibile. Se mai fosse possibile rendere $r\sqrt{\frac{l}{g}}=1$, l' ellissi diverrebbe un cerchio; ma anche sotto l' equatore, dove r ha il massimo valore poichè ivi è $sen\lambda=1$, l dovrebbe pareggiare circa 300 raggi terrestri, perchè fosse $r\sqrt{\frac{l}{g}}=1$.

Osserviamo in ultimo che la velocità impressa al pendolo, e che ne rende coniche le oscillazioni, provvenendo dalla componente della rotazione terrestre secondo la verticale del luogo, l' ellissi sarà percorsa dal pendolo nel senso di quella componente, vale a dire nella direzione *nord ovest sud est*.

CAPO DECIMO.

Del moto dei fluidi.

Le equazioni esprimenti il moto dei corpi solidi non sono abbastanza generali per rappresentare quello dei fluidi — Ricerca delle equazioni appropriate al moto di questi corpi — Condizione che può far dipendere la determinazione del moto di un fluido dalla conoscenza di una certa funzione — Applicazione delle formole generali alla determinazione della velocità con cui i liquidi fluiscono dalle luci dei recipienti tenuti costantemente pieni — Applicazione della stessa teorica alla determinazione della legge con cui il suono si trasmette per le sostanze aeriformi — Velocità del suono nell' aria e nell' acqua.

289. I moti possibili ai sistemi di molecole costituenti i corpi, saranno più o meno varii, secondo che più o meno libere le molecole si troveranno le une rispetto alle altre. Ponendo che sia invincibile dall' azione delle forze impresse la coesione che unisce le molecole di un solido, queste rispetto allo spazio occupato dal loro sistema non potranno concepir moto che non sia conciliabile coll' invariabilità delle loro mutue posizioni e distanze. Quindi potranno tutto al più girare intorno ad un asse che, se si vuole, cangi posizione da un istante all' altro del tempo, mentre il loro luogo, relativo ai limiti del solido, sarà comunque trasportato nello spazio assoluto. E da ciò poi deriva che la traslazione per cammino elicoide sia la forma più generale di ogni moto possibile agli elementi di siffatti sistemi.

Ma le molecole dei corpi fluidi, le quali nei liquidi sono ritenute da debolissima coesione, e si ripellono a vicenda negli aeriformi, possono, senza ledere la continuità del loro sistema, avere tale indipendenza di moto da essere comunque trasportate nello spazio relativo al loro sistema, mentre questo rimane immobile nello spazio assoluto. Così in un liquido che si riscalda per calore applicato al fondo del suo recipiente, si stabiliscono delle correnti che vanno dal fondo alla su-

perficie di livello, nel tempo stesso che altre da questa discendono; e questo moto intestino che avrà termine nell'ebollizione, si compie nella quiete del recipiente.

Laonde se nei solidi dal moto del corpo può dedursi quello che avrà ogni sua molecola, nei fluidi al contrario un dato moto dell' intera massa può coesistere a moti variamente diversi delle sue minime particelle. E da ciò poi deriva che le equazioni che valgono ad esprimere qualsivoglia moto di un solido, non sono abbastanza generali pel moto dei fluidi.

290. Per ottenere le equazioni convenienti ad ogni moto possibile in questa specie di corpi, prendiamo a considerare la dipendenza delle velocità molecolari di una massa fluida dal luogo che occupano le sue molecole e dal tempo in cui vi pervengono.

Al termine del tempo t siano x, y, z le coordinate del luogo occupato da una molecola fluida dm, ed u, v, w le componenti della sua velocità. I valori di queste componenti dipenderanno in generale dal tempo, e dal luogo in cui la molecola si trova, il quale luogo dipende ancor esso dal tempo. Le componenti u, v e w saranno dunque funzioni delle quattro variabili t, x, y, z, mentre le tre ultime sono funzioni della prima. Perciò prendendo il tempo come variabile indipendente, le derivate u', v' w' di u, v e w saranno espresse da

$$u'=\frac{du}{dt}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$v'=\frac{dv}{dt}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$w'=\frac{dw}{dt}+\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Nelle quali espressioni sostituendo a $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ i corrispondenti valori u, v e w, esse diverranno

$$(1)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{du}{dt} + u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{du}{dy} + w\dfrac{du}{dz} \\ v' = \dfrac{dv}{dt} + u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dv}{dy} + w\dfrac{dv}{dz} \\ w' = \dfrac{dw}{dt} + u\dfrac{dw}{dx} + v\dfrac{dw}{dy} + w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Or chiamando X, Y, Z le forze che durante il tempo dt agiranno sull'unità di massa del fluido, Xdm, Ydm, Zdm saranno quelle agenti sulla molecola dm. Ma poichè dopo il tempo dt la molecola si troverà possedere una forza acceleratrice risultante di $u'dm$, $v'dm$, $w'dm$; così se ad Xdm, Ydm, Zdm si aggiungessero le forze $-u'dm$, $-v'dm$, $-w'dm$, la molecola resterebbe in equilibrio, ed avremmo (n° 127)

$$(2)\quad \frac{dp}{dx} = \rho(X - u'),\quad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - v'),\quad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - w').$$

In queste equazioni poniamo i valori di u', v' e w' di sopra trovati, ed otterremo

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz} \\ \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz} \\ \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Abbiamo così tre equazioni contenenti le cinque variabili p, ρ, u, v e w che sono altrettante funzioni di t. Per ottenere le altre due equazioni necessarie a poterne esprimere i valori in funzione di t, osserviamo che immaginando al termine di questo tempo divisa la massa fluida in elementi parallelepipedi, i cui spigoli siano paralleli agli assi, l'elemento di massa che allora avrà il volume $dxdydz$, dovrà in generale averne uno diverso dopo il tempo $t + dt$, essendochè la densità ρ è riguardata come funzione del tempo. Or le ascisse dei

punti estremi dello spigolo dx, che al termine del tempo t erano x ed $x+dx$, dopo il tempo $t+dt$ saranno divenute $x+udt$ ed $x+udt+dx+\frac{du}{dx}dxdt$; quindi, trascurando gl' infinitesimi di ordine superiore, riguarderemo la nuova posizione dello spigolo come parallela alla prima, e perciò il suo valore dx sarà divenuto $dx(1+\frac{du}{dx}dt)$ al termine del tempo $t+dt$. E similmente troveremmo che gli spigoli dy, dz saranno divenuti $dy(1+\frac{dv}{dy}dt)$ e $dz(1+\frac{dw}{dz}dt)$. Quindi il nuovo volume, trascurando gl' infinitesimi di 3° ordine, sarà espresso da

$$dxdydz(1+\frac{du}{dx}dt)(1+\frac{dv}{dy}dt)(1+\frac{dw}{dz}dt)$$
$$=dxdydz(1+\frac{du}{dx}dt+\frac{dv}{dy}dt+\frac{dw}{dz}dt).$$

Ma la densità, ch' era ρ al termine del tempo t, dopo il tempo $t+dt$ sarà divenuta

$$\rho+\frac{d\rho}{dt}dt+\frac{d\rho}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}dt+\frac{d\rho}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}dt+\frac{d\rho}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}dt,$$

ossia

$$\rho+\frac{d\rho}{dt}dt+u\frac{d\rho}{dx}dt+v\frac{d\rho}{dy}dt+w\frac{d\rho}{dz}dt;$$

ed il nuovo volume elementare dovendo contenere lo stesso numero di molecole, che si racchiudeva nel volume $dxdydz$, il prodotto del nuovo volume pel nuovo valore della densità dovrà pareggiare $\rho dxdydz$. Eseguita la moltiplicazione si troverà che tale eguaglianza non potrà aver luogo se non sia soddisfatta l' equazione

$$(4)\quad \rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+\frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}=0,$$

ossia

$$(5) \qquad \frac{d.u\rho}{dx} + \frac{d.v\rho}{dy} + \frac{d.w\rho}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0 ;$$

e poichè questa deriva immediatamente dall' idea di continuità nella massa fluida, ha perciò ricevuto il nome di *equazione della continuità.*

Or se il fluido fosse un liquido di temperatura uniforme in tutta la massa, ρ disegnerebbe una costante e l' equazione (4) si risolverebbe nelle due

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 ,$$

e

$$\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0 ,$$

che insieme alle equazioni (3) servirebbero a determinare le cinque funzioni ρ, p, u, v e w. Se poi il fluido fosse aeriforme, la quinta equazione sarebbe data dalla legge di Mariotte

$$p = k\rho .$$

291. Se il trinomio $udx + vdy + wdz$ sia differenziale esatto di una certa funzione φ delle variabili t, x, y e z, dimodochè u, v e w ne siano le derivate parziali rispetto ad x, y, z riguardate come variabili indipendenti, le tre equazioni (2) potranno ridursi ad una sola, e la quistione si racchiuderà tutta in determinare la funzione φ, dalla quale per mezzo di differenziazione si otterrebbero le tre velocità componenti u, v e w. Ed in vero supponendo ancora che le forze X, Y, Z siano (n° 170) derivate parziali di una certa funzione V di x, y, z, dimodochè si abbia

$$X = \frac{dV}{dx} , \; Y = \frac{dV}{dy} , \; Z = \frac{dV}{dz} ,$$

allora sostituendone i valori insieme a quelli di u, v e w

nelle equazioni (3), queste diverranno

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dx}=\frac{dV}{dx}-\frac{d^2\varphi}{dxdt}-\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dxdy}-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dxdz}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dy}=\frac{dV}{dy}-\frac{d^2\varphi}{dydt}-\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dydx}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dydz}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dz}=\frac{dV}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dzdt}-\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dzdx}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dzdy}-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Moltiplicando queste tre equazioni ordinatamente per dx, dy, dz ed addizionandone i prodotti avremo

$$(6)\qquad \frac{dp}{\rho}=dV-d\,\frac{d\varphi}{dt}-\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Quindi se ρ è costante, come avviene nei liquidi di uniforme temperatura, integrando l'ultima equazione e supponendo la costante implicitamente contenuta nell' incognita funzione φ, avremo

$$\frac{p}{\rho}=V-\frac{d\varphi}{dt}-\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

e se ρ è funzione soltanto di p, come nelle masse aeriformi di egual temperatura, il valore di ρ tolto dalla relazione $p=k\rho$ ridurrà il primo membro dell' equazione (6) a

$$k\int\frac{dp}{p}=k.\overset{e}{\log}p.$$

Tutto dunque dipende dalla determinazione di φ. Per ciò osserviamo che ponendo

$$udx+vdy+wdz=d\varphi,$$

l' equazione (5) diverrà

$$(7)\qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dx}}{dx}+\frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dy}}{dy}+\frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dz}}{dz}=0.$$

Se ρ è costante, quest' equazione riducendosi a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0\,,$$

farà conoscere φ. E se ρ dipende soltanto da p, allora sostituendo a ρ la funzione di p, che la rappresenta, ed a p il suo valore tratto dall' equazione (6), l' equazione (7) non contenendo altra incognita che φ, ne farà conoscere il valore.

292. Perchè la teorica esposta nel n° precedente sia applicabile, è necessario che l' equazione

$$udx+vdy+wdz=d\varphi$$

sia soddisfatta in tutta la durata del moto. Poniamo che ciò si verifichi pel tempo $t=t_1$, pel quale siano u_1, v_1, e w_1 i valori di u, v e w; e cerchiamo se debba tuttavia reggere pel tempo $t=t_1+\tau$. Indicando con u', v' e w' le derivate parziali di u, v e w rispetto a t, avremo nell' ipotesi che τ sia infinitesimo

$$u=u_1+u'\tau,\ v=v_1+v'\tau,\ w=w_1+w'\tau.$$

Moltiplicando queste equazioni ordinatamente per dx, dy, dz ed addizionandone i prodotti avremo

$$udx+vdy+wdz=u_1dx+v_1dy+w_1dz+\tau(u'dx+v'dy+w'dz).$$

Or ponendo nell' equazione (6) $\frac{dp}{\rho}=dP$, essendo $\frac{dp}{\rho}$ un differenziale esatto nelle due ipotesi da noi fatte sulla natura di ρ; e sostituendo inoltre a $d\frac{d\varphi}{dt}$ il suo valore $u'dx+v'dy+w'dz$, si avrà

$$dP=dV-(u'dx+v'dy+w'dz)-\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

donde

$$u'dx + v'dy + w'dz = d\left\{V - P - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]\right\}.$$

È dunque il primo membro di questa equazione un differenziale esatto; ma per ipotesi $u_1dx + v_1dy + w_1dz$ è differenziale esatto; dunque lo sarà ancora $udx + vdy + wdz$. Laonde se questo trinomio è differenziale esatto pel tempo $t = t_1$, lo sarà ancora pel tempo $t = t_1 + \tau$, e quindi pei tempi $t = t_1 + 2\tau$, $t = t_1 + 3\tau$, ecc; vale a dire per tutta la durata del moto. Quindi se il trinomio è differenziale esatto nell' origine del tempo, lo sarà sempre; e se allora non fosse tale, non lo sarebbe giammai.

Così per un liquido messo in movimento dall' azione della gravità, avremo nell' origine del moto $u = v = w = 0$; quindi

$$udx + vdy + wdz = 0.$$

E poichè sotto questa forma il trinomio è differenziale esatto, tale sarà in tutta la durata del moto.

Al contrario lo stesso trinomio non sarebbe differenziale esatto per un liquido che conservando inalterate le rispettive posizioni delle proprie molecole, rotasse intorno ad un asse immobile. Imperocchè prendendo l'asse di rotazione per quello delle z, e chiamando ω la celerità angolare, avremo

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0\,;$$

quindi

$$udx + vdy + wdz = \omega\,(xdy - ydx);$$

e questo binomio evidentemente non è differenziale esatto.

293. Passiamo ora a qualche applicazione della teorica generale finora esposta; e facciamoci primieramente a ricercare la celerità di efflusso dei liquidi dalle luci dei recipienti mantenuti costantemente pieni.

Ponendo l' origine nella superficie di livello e l'asse delle z nella verticale condotta per la luce di efflusso, che suppo-

niamo scolpita nel fondo orizzontale del recipiente, avremo

$$X = o,\ Y = o,\ Z = g.$$

Quindi le equazioni (2) diverranno

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u',\ \frac{dp}{dy} = -\rho v',\ \frac{dp}{dz} = \rho(g - w'),$$

le quali moltiplicate ordinatamente per dx, dy, dz, e poi addizionate, ci daranno

$$dp = g\rho dz - \rho(u'dx + v'dy + w'dz)$$

Or avendo l'esperienza dimostrato che rispetto alla specie di efflusso che noi consideriamo, la portata del recipiente è sempre proporzionale al tempo, quando tutte le altre cose sono eguali, ne segue:

— 1° Che in una serie di eguali tempi, eguali porzioni di massa fluida dovranno transitare per una data sezione del recipiente. Quindi ad ogni punto dello spazio, che n'è circoscritto, dovrà corrispondere un certo valore della velocità v che ivi avranno le molecole, e della pressione p a cui si troveranno sottoposte. Saranno dunque v e p indipendenti dal tempo t, e funzioni soltanto delle coordinate x, y, z del luogo istantaneamente occupato dalla molecola fluida.

— 2° Che in un medesimo tempo eguali quantità di fluido dovranno passare per tutte le sezioni del recipiente parallele al piano delle xy. Quindi se chiamiamo v_1 e v_2 le velocità possedute da una stessa molecola nel passare per le sezioni le cui aree rappresentiamo con k_1 e k_2; avremo

$$v_1 k_1 = v_2 k_2,\ \text{ossia}\ v_1 : v_2 = k_2 : k_1,$$

vale a dire che la velocità di una molecola dovrà variare inversamente all'area della sezione che attraversa.

Segue dal primo di questi due corollarii che le derivate u' v' e w' delle componenti u, v e w della celerità V dovran-

no mercè le equazioni (1) esser espresse da

$$u' = u\frac{du}{dx}, \quad v' = v\frac{dv}{dy}, \quad w' = w\frac{dw}{dz},$$

non potendo u, v e w esser funzioni di altra variabile che delle coordinate a cui sono parallele. Saranno dunque $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{dv}{dy}dy$, $\frac{dw}{dz}dz$ differenziali esatti delle funzioni u, v e w; in conseguenza moltiplicando ordinatamente per dx, dy, dz le equazioni precedenti e poi addizionandone i prodotti, dovrà aversi

$$u'dx + v'dy + w'dz = udu + vdv + wdw = Vdv = \tfrac{1}{2}d.V^2.$$

La sostituzione di questo valore nell' equazione (9) la trasformerà in

$$dp = g\rho dz - \tfrac{1}{2}\rho d.V^2,$$

il cui integrale completo è

$$p - p_0 = g\rho z - \tfrac{1}{2}(V^2 - V_0^2),$$

p_0 indicando la pressione sulla superficie di livello e V_0 la corrispondente velocità. E se con p_1 dinotiamo la pressione che dal basso in alto avrà luogo sull' area della luce e con V_1 la celerità di efflusso, l' integrale tra i limiti $z = 0$ e $z = h$, dopo aver sostituito nell' equazione precedente a V_0 l' equivalente kV_1 in forza del 2° corollario, diverrà

$$p_1 - p_0 = g\rho h - \tfrac{1}{2}\rho V_1^2(1 - k^2);$$

donde

$$V_1 = \sqrt{\frac{2[gh - \frac{1}{\rho}(p_1 - p_0)]}{1 - k^2}}.$$

Ma se la luce di efflusso è piccolissima potremo non solo trascurare k^2 rispetto a 1, ma potremo ancora riguardare V_1 come costante in tutti i punti dell' area della luce. E se poniamo ancora che la differenza $p_1 - p_0$ sia presso che nulla,

avremo la velocità di efflusso

$$v_1 = \sqrt{2gh},$$

vale a dire eguale a quella che un grave acquisterebbe scendendo nel voto dall' altezza h.

Questa legge, scoverta la prima volta dal Torricelli, costituisce il principio donde parte l' Idrodinamica sperimentale per risolvere tutte le quistioni relative all' efflusso dei liquidi dai recipienti che li contengono.

294. Per seconda applicazione delle formole generali relative al moto dei fluidi, facciamoci a ricercare il modo con cui si attua la trasmissione dei suoni pel loro mezzo.

Supponiamo che in una massa gassosa in perfetta quiete e di uniforme temperatura e densità, avvenga una scossa, della cui velocità prodotta le componenti u, v e w restino piccolissime in tutta la durata del moto. Potremo dunque trascurare le 2^e potenze $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2$, $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$; e poichè in una massa aeriforme la densità non potrebbe esser costante senza che fosse tale anche la pressione, avremo così $dV = 0$, e l' equazione (6) diverrà

$$\frac{dp}{\rho} = -d\frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

Or la compressibilità dei corpi aeriformi non concedendo che la densità, supposta costante nella quiete, rimanesse la stessa nel loro movimento; ne segue che indicando con $1 : 1 + \gamma$ la ragione secondo la quale la densità D avrà variato nel passaggio dalla quiete al moto, avremo

$$\rho = D\,(1 + \gamma).$$

E se la densità ha mutato valore nella ragione di $1 : 1 + \gamma$, similmente sarà variata la pressione, la quale è sempre misurata dal peso della colonna barometrica a cui fa equilibrio.

Sia a l' altezza di questa colonna, g la forza di gravità, Δ la densità del mercurio, e p_o la pressione nella quiete del fluido ; sarà

$$p_o = ga\Delta,$$

e la pressione p che avrà luogo nel moto del fluido, sarà espressa da

$$p = ga(1 + \gamma)\Delta.$$

Osserviamo ancora che la temperatura, supposta uniforme nella quiete del fluido, non potrà conservarsi inalterata nel condensamento positivo o negativo che succederà alla comunicazione del moto; imperocchè le sostanze aeriformi svolgono calore, ovvero ne assorbono, secondochè vengono compresse o rarefatte. E se queste variazioni di densità sono abbastanza celeri, per non esservi tempo sufficiente alla riproduzione dell' equilibrio termico, la forza elastica del fluido, a cui fa equilibrio la pressione p, ne resterà necessariamente alterata.

Per introdurre questo elemento nella funzione che rappresenta il valore di p, chiamiamo θ la temperatura che il fluido aveva nella quiete, τ la quantità di gradi di cui essa è variata per effetto del moto impresso, ed α il coefficiente di dilatazione. Pel cangiamento τ di temperatura la forza elastica del gas sarà variata nella ragione di $1 + \alpha\theta$ ad $1 + \alpha(\theta + \tau)$; e perciò si avrà

$$p = ga(1 + \gamma)\left(1 + \frac{\alpha\tau}{1 + \alpha\theta}\right)\Delta. \tag{11}$$

Egli è chiaro che τ dovrà essere una funzione di γ. Per determinarla osserviamo che il gas, il quale può liberamente dilatarsi, dovrà avere una capacità termica maggiore di quella che avrebbe se da una pressione variabile fosse costretto a conservare un volume costante, qualunque cangiamento ricevesse la sua temperatura. Or chiamando c la capacità termica del gas sotto pressione costante, poniamo che

la temperatura dell' unità di massa del fluido venga aumentata di ε gradi; la quantità di calore si aumenterà di $c\varepsilon$, mentre il volume del fluido diverrà $\frac{1+\alpha(\theta+\varepsilon)}{1+\alpha\theta}$. E sottoponendo questo volume aumentato a tale pressione da ridurlo a quel che era prima di ricevere l'aumento ε di temperatura, questa si accrescerà ancora di un certo numero τ di gradi, che si svolgeranno nella riduzione del volume. In conguenza, chiamando c' la capacità termica del gas a volume costante, la sua unità di massa non potrà ritornare alla pressione ed al volume che aveva senza perdere la quantità di calore espressa da $c'(\varepsilon+\tau)$. Sarà dunque

$$c\varepsilon = c'(\varepsilon+\tau);$$

donde

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{\tau}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Ma se la condensazione γ fosse stata prodotta da una diminuzione ε della temperatura θ, essa avrebbe dovuto soddisfare alla relazione

$$\frac{1}{1+\gamma} = \frac{1+\alpha(\theta-\varepsilon)}{1+\alpha\theta},$$

dalla quale, trascurando il prodotto $\gamma\alpha\varepsilon$ come piccolissimo, si ottiene

$$\varepsilon = \frac{\gamma(1+\alpha\theta)}{\alpha},$$

che sostituito nell'equazione (12) ci dà

$$\frac{\alpha\tau}{1+\alpha\theta} = \gamma\left(\frac{c}{c'}-1\right).$$

Or sostituendo nell'equazione 11 il 2° membro di quest' ultima eguaglianza che definisce τ in funzione di γ, e trascurando i termini in γ^2, quell' equazione diverrà

$$p = ga(1+\gamma\frac{c}{c'})\Delta\ ;$$

donde

$$dp = ga\frac{c}{c'}\Delta d\gamma$$

e

$$\frac{dp}{p} = \frac{gac\Delta}{Dc'}\cdot\frac{d\gamma}{1+\gamma}\ .$$

Quindi l' equazione (10) diverrà

$$\frac{gac\Delta}{Dc'}\cdot\frac{d\gamma}{1+\gamma} = -d\frac{d\varphi}{dt}\ ,$$

donde per integrazione avremo

$$\frac{gac\Delta}{Dc'}\overset{e}{\log}(1+\gamma) = -\frac{d\varphi}{dt}\ .$$

Ed essendo γ una piccolissima frazione, sarà $\overset{e}{\log}(1+\gamma)=\gamma$; e l' equazione precedente riducendosi a

$$\frac{gac\Delta}{Dc'}\gamma = -\frac{d\varphi}{dt}$$

ci darà

(13) $$\gamma = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\ ,$$

ponendo per brevità $\frac{gac\Delta}{Dc'} = n^2$.

Daltronde dall'equazione $p = D(1+\gamma)$ deducendosi $dp = Dd\gamma$, l' equazione (5) diverrà

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0\ ,$$

ossia (trascurando i termini troppo piccoli rispetto ai rimanenti)

$$\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0. \tag{14}$$

Or eliminando γ dalle equazioni (13) e (14) si ottiene

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=n^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \tag{15}$$

295. Le equazioni (13) e (15) contengono tutti gli elementi necessarii alla completa soluzione del problema, essendo che pel loro mezzo potremo in ogn' istante del tempo definire la condensazione γ e le componenti $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ della velocità di ogni molecola fluida. Ed in vero, supponiamo che da un punto di una massa di aria indefinita e di uniforme densità e temperatura, uno scuotimento s' irradii egualmente in tutti i sensi. Togliendo ad origine il centro del moto, ne sia r la distanza di una molecola, e ζ la sua velocità nel senso del raggio r. Le componenti di ζ secondo gli assi saranno

$$u=\zeta\frac{x}{r},\quad v=\zeta\frac{y}{r},\quad w=\zeta\frac{z}{r}.$$

Avremo ancora

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad xdx+ydy+zdz=rdr,$$

e ponendo in quest' ultima i valori di x, y, z dedotti da quelli di u, v, e w, ne avremo

$$udx+vdy+wdz=\zeta dr.$$

È dunque il trinomio $udx+vdy+wdz$ differenziale esatto di una funzione φ di r e t, e di cui ζ è la derivata rispetto ad r. Or della funzione φ, di cui conosciamo le derivate rispetto ad r, prendendo quelle che si rapportano ad x, y, z avremo

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{x}{r},\quad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{y}{r},\quad \frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{z}{r}.$$

E similmente avremo le derivate seconde

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

Sarà dunque

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr};$$

e così l'equazione (15) diverrà

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=n^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

ovvero, riguardando r e t come variabili indipendenti,

$$\frac{d^2.r\varphi}{dt^2}=n^2\frac{d^2.r\varphi}{dr^2}.$$

L'integrale completo di quest'ultima equazione è

$$r\varphi=\mathrm{F}(r+nt)+f(r-nt),$$

come si potrà rilevare, prendendone le derivate seconde rispetto a t ed r, e sostituendole nell'equazione precedente.

Or indicando con F′ ed f' le derivate di F ed f, avremo

$$(16)\quad\begin{cases}\zeta=\dfrac{d\varphi}{dr}=\dfrac{1}{r}\left(\mathrm{F}'(r+nt)+f'(r-nt)\right)-\dfrac{1}{r^2}\left(\mathrm{F}(r+nt)+f(r-nt)\right)\\ \gamma=-\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{1}{nr}\left(f(r-nt)-\mathrm{F}'(r+nt)\right).\end{cases}$$

La soluzione del problema dipenderà dunque dalla determinazione delle funzioni arbitrarie F ed f e delle loro derivate F′ ed f'. Siano perciò $\psi(r)$ ed $\frac{1}{n}\chi(r)$ i valori iniziali

di ζ e γ : sarà

$$\psi(r) = \frac{d.\frac{1}{r}F(r)}{dr} + \frac{d.\frac{1}{r}f(r)}{dr}$$

$$r\chi(r) = \frac{d.f(r)}{dr} - \frac{d.F(r)}{dr};$$

donde

$$F(r) + f(r) = r\int\psi(r)dr,$$
$$f(r) - F(r) = \int r\chi(r)dr.$$

Quindi

$$(17)\quad \begin{cases} f(r) = \frac{1}{2}[r\int\psi(r)dr + \int r\chi(r)dr], \\ F(r) = \frac{1}{2}[r\int\psi(r)dr - \int r\chi(r)dr], \\ f'(r) = \frac{1}{2}r[\psi(r) + \chi(r)] + \frac{1}{2}\int\psi(r)dr, \\ F'(r) = \frac{1}{2}r[\psi(r) - \chi(r)] + \frac{1}{2}\int\chi(r)dr. \end{cases}$$

296. Per vedere l'uso di queste formole nella ricerca delle leggi relative alla trasmissione del suono, poniamo che la scossa primitiva si estenda ad una distanza ε dal centro; dimodochè i valori, che arbitrariamente potranno darsi a $\psi(r)$ e $\chi(r)$, dovranno estendersi da $r=0$ ad $r=\varepsilon$. Quindi ogni valore di t che renda

$$r + nt > \varepsilon.$$

renderà nulle le funzioni ψ e χ; ed in conseguenza $\int\psi(r)\,dr$ e $\int r\chi(r)dr$ esprimeranno quantità costanti. Laonde se poniamo che quest'integrali debbano svanire con $r=\infty$, essi saranno nulli da $r=\varepsilon$ ad $r=\infty$.

Ciò posto, consideriamo il punto M (*fig. 146*) situato dentro la sfera dello scuotimento primitivo di raggio $AB=\varepsilon$. Finchè sarà

$$r + nt < \varepsilon \text{ ed } r > nt,$$

i valori di F, F', f ed f' saranno dati dalle equazioni (17), e sostituiti nelle equazioni (16) faranno determinare ζ e γ.

Nel caso poi che fosse $r < nt$, osserviamo che il centro A dovendo rimanere fisso in tutta la durata del moto, è d'uopo

che ζ vada a zero insieme con r; ed in conseguenza quando r sarà infinitesimo, e perciò $r+nt=nt$, ed $r-nt=-nt$, è necessario che sia

$$F(r+nt)+f(r-nt)=\mathrm{T}r$$

e

$$F'(r+nt)+f'(r-nt)=\mathrm{T}\,,$$

T indicando un'ignota funzione del tempo. Or facciamo $r=0$ nella prima di queste equazioni e nella sua derivata rispetto al tempo

$$F'(r+nt)-f'(r-nt)=\frac{r}{n}\cdot\frac{d\mathrm{T}}{dt}\,;$$

ed avremo

$$F(nt)+f(-nt)=0\,,\quad F'(nt)-f'(-nt)=0,$$

donde

$$(18)\qquad f(-nt)=-F(nt)\,,\ \text{e}\ f'(-nt)=F'(nt).$$

Potremo dunque nell'ipotesi di $r<nt$ dedurre $f(r-nt)$ e $f'(r-nt)$ da $F(nt-r)$ e $F'(nt-r)$. E perciò se $nt-r$ supera ε, saranno nulle F, F', f ed f'; quindi $\zeta=0$ e $\gamma=0$; vale a dire che tutte le molecole comprese nella sfera dell' eccitamento primitivo saranno ridotte al riposo dopo il tempo $t=\frac{\varepsilon+r}{n}$. Esse dunque hanno durato nel moto pel tempo $t=\frac{\varepsilon+r}{n}$, il quale è stato $\frac{\varepsilon}{n}$ per la molecola situata al centro, e $\frac{2\varepsilon}{n}$ per ogni molecola giacente sulla superficie sferica di raggio ε.

Passiamo ora a vedere ciò che sarà della molecola M' situata fuori della detta sfera. Essendo in questo caso

$$r+nt>\varepsilon\,,$$

saranno nulle F ed F', e le equazioni (16) ci daranno

$$\zeta = \frac{1}{r} f'(r-nt) - \frac{1}{r^2} f(r-nt)$$

$$\gamma = \frac{1}{nr} f'(r-nt).$$

Saranno in conseguenza nulle ζ e γ, quando si avrà $r - nt > \varepsilon$; e nessun movimento sarà comunicato alla molecola M' prima del tempo dato dall' equazione

$$r = nt + \varepsilon.$$

Laonde il suono perverrà tanto più tardi in M', per quanto ne sarà più grande la distanza r dal centro sonoro. Il suono è dunque progressivo.

Inoltre chiamando r ed r' le distanze di due molecole dal centro, t e t' i tempi necessarii al pervenimento del suono, avremo dall' equazione precedente

$$r' - r = n\,(t' - t).$$

Ed essendo lo spazio $r' - r$ proporzionale al tempo $t' - t$, il moto del suono è uniforme, e la costante n ne rappresenta la celerità.

Se $r - nt$ non può superare ε, neppure potrà essere $nt - r > \varepsilon$; quindi se nessun movimento avrà potuto pervenire alla molecola M' prima del tempo $t = \frac{r-\varepsilon}{n}$, ogni movimento sarà in essa estinto dopo il tempo $t = \frac{r+\varepsilon}{n}$. Dunque per ogni molecola giacente fuori la sfera dell' eccitamento primitivo, la durata del moto sarà $\frac{2\varepsilon}{n}$, egualmente che per ogni molecola giacente sulla superficie di detta sfera.

Dalla stessa equazione $r = nt + \varepsilon$ segue ancora che dopo il tempo $\frac{2\varepsilon}{n}$, che segna la durata dell' eccitamento primitivo, il moto si troverà propagato fino alla superficie sferica avente il raggio $AC = 3\varepsilon$; ed ivi terminerà dopo il

tempo $\frac{4\epsilon}{n}$. Ma finiva in B dopo il tempo $\frac{2\epsilon}{n}$; dunque durava il tempo $\frac{2\epsilon}{n}$ in tutta la falda BC, pari in doppiezza al diametro 2ϵ della sfera AB. Dopo un altro tempo $\frac{2\epsilon}{n}$ ogni moto sarebbe ancora terminato nella falda che segue immediatamente BC ed altrettanto doppia, e così di seguito. Queste falde costituiscono le *onde sonore*, e 2ϵ ne rappresenta la lungezza.

297. Abbiamo qui sopra trovato che

$$n = \sqrt{\frac{gac\Delta}{Dc'}}$$

rappresenta la celerità di trasmissione del suono. Per comparare i risultamenti di questa formola ai dati sperimentali che si hanno rispetto alla stessa celerità, osserviamo che D indicando la densità dell' aria alla temperatura 0°, bisognerà sostituire $\frac{D}{1+\alpha\theta}$ per la temperatura θ: avremo così

$$n = \sqrt{\frac{gac\Delta}{Dc'}(1+\alpha\theta)},$$

Or essendo (*pag.* 258) $\frac{\Delta}{D} = 10466{,}8$, e facendo $a = 0^m{,}76$, avremo

$$\frac{a\Delta}{D} = 7954^m,\ 768\,;$$

e questo valore dovrà essere indipendente dall' altezza barometrica sotto la quale il suono si trasmette, poichè a e D variano secondo la stessa ragione. Ed in fatti gli accademici francesi, andati al Perù per misurarvi un arco del meridiano, trovarono che a Quito, ove il barometro saliva appena a $0^m{,}55$, il suono aveva quasi la stessa celerità che a Parigi sotto la pressione 0^m, 76.

si troverà $n = 1431^m$. I summentovati fisici trovarono, mercè sperimenti eseguiti sul lago di Ginevra, la celerità del suono nell'acqua eguale a 1435^m. La piccola differenza del dato sperimentale dal risultamento della formola dimostra che l'acqua nella compressione non dà sensibile svolgimento di calore; deduzione ch'è stata rifermata con esperimenti diretti [1].

CAPO UNDECIMO.

Del moto dei sistemi.

Principio di D'Alembert. Applicazione di questo principio alla macchina di Atwood — Combinazione del principio di D'Alembert con quello delle celerità virtuali. Applicazione alla determinazione del moto di una catena omogenea che senza attrito scorresse su due piani inclinati — Determinazione del moto del centro di gravità di un sistema. Conseguenze che ne derivano — Principio della conservazione dei momenti — Principio della conservazione delle aje. Piano invariabile.

299. Un solido non è che un sistema di molecole; quindi le leggi che abbiamo trovato pel moto dei solidi, non sono che leggi di moto pei sistemi. Ma si hanno ordinamenti di corpi del pari che in ogni solido si trova un ordinamento di molecole; può dunque la ricerca delle leggi che reggono i moti dei sistemi, avere un subbietto più esteso di quello che finora abbiamo considerato. E dando così la massima comprensione al concetto dinamico, potremo render compiuta quella sintesi, che partendo dalle leggi di moto per un punto materiale, non può di sua natura arrestarsi finchè non abbia formolato le leggi di moto per un qualsivoglia sistema di corpi.

300. D'Alembert fu il primo ad esporre un principio, mer-

[1] Vedi il capo 1° del 5° libro della mia Fisica.

cè del quale la legge di moto di un sistema può dedursi dalle stesse formole che n' esprimono le condizioni di equilibrio. Poniamo che ai corpi A, B, C,... componenti un sistema, siano impresse delle forze le quali, se i corpi fossero liberi, vi produrrebbero i moti, P_1, P_2, P_3,... ma che per la resistenza opposta dai legami donde sono congiunte le diverse parti del sistema, non producono effettivamente che i moti p_1, p_2, p_3,... Considerando questi ultimi come componenti dei primi, la legge del parallelogrammo ci darà i moti q_1, q_2, q_3,... che combinandosi coi moti p_1, p_2, p_3,... darebbero come risultanti i moti P_1, P_2, P_3,... E poichè le forze, a cui sarebbero dovuti i movimenti q_1, q_2, q_3,.... non prendono alcuna parte nella produzione dei moti effettivi p_1, p_2, p_3,..., fa d' uopo conchiudere che la loro azione resti equilibrata dalle tensioni da esse occasionate nei legami congiungenti le diverse parti del sistema. Quindi se a queste parti non fossero comunicati che i moti p_1, p_2, p_3,... i loro legami non patirebbero tensione veruna; e se in vece fossero ad esse comunicati i soli moti q_1, q_2, q_3,..., il sistema non prenderebbe alcun movimento. Quindi se alle parti, a cui sono stati impressi i moti P_1, P_2, P_3,..., fossero ancora comunicati i moti $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$,... il sistema dovrebbe necessariamente rimanere in equilibrio. In ciò consiste il principio di D' Alembert, il quale va formolato nel seguente modo.

Se le forze, a cui son dovuti i moti delle singole parti di un sistema, venissero girate in opposta direzione, esse farebbero equilibrio a quelle che realmente vi sono state impresse.

301. Applichiamo questo principio alla determinazione del moto nella macchina di Atwood; la quale, com' è noto, consiste in una ruota, il cui asse si fa orizzontalmente giacere sopra quattro altre ruote a fine di attenuare l' attrito, che incontrerebbe girando sopra sostegni fissi. Sulla circonferenza della prima ruota è scolpita una gola, destinata a ricevere

un filo da cui pendono due cilindri di eguali masse, che terranno la ruota in equilibrio, finchè un piccolo peso addizionale non renda preponderante la massa di uno dei cilindri. Sia m la massa di ciascun cilindro ed α quella del peso addizionale; sarà $g(m+\alpha) = gm'$ il peso del cilindrio preponderante, e gm quello dell'altro. Laonde sarà $g(m'-m) = g\alpha$ la forza impressa al sistema, e chiamando c il raggio della ruota, sarà $g\alpha c$ il momento di essa forza rispetto all'asse di rotazione.

Inoltre alla fine del tempo t siano u ed u' le distanze delle masse m ed m' dal piano orizzontale condotto per la posizione iniziale della massa m'; in conseguenza le due masse possederanno le forze $m'\frac{d^2u'}{dt^2}$, e $-m\frac{d^2u}{dt^2}$, il cui momento risultante rispetto all'asse di rotazione sarà

$$c\left(m'\frac{d^2u'}{dt^2} - m\frac{d^2u}{dt^2}\right).$$

In fine sarà $\frac{d\theta}{dt}\int r^2dm$ (n° 270) il momento della forza posseduta dalla ruota, e che potremo esprimere con Mk^2, M disegnando la massa della ruota, e k il suo braccio d'inerzia.

Or girando in opposte direzioni i momenti delle forze effettivamente possedute dalla ruota e dalle due masse m ed m', essi dovranno pel principio esposto far equilibrio al momento della forza impressa; l'equazione del moto sarà dunque

$$g\alpha c - c\left(m'\frac{d^2u'}{dt^2} - m\frac{d^2u}{dt^2}\right) - \frac{d\theta}{dt}Mk^2 = 0.$$

Ma le celerità $\frac{du'}{dt}$ e $\frac{du}{dt}$ essendo eguali a quelle dei punti della ruota, donde si distaccano i capi del filo da cui pendono le masse m ed m', avremo

$$\frac{du'}{dt} = c\theta\,, \quad \frac{du}{dt} = -c\theta\,;$$

quindi

$$\frac{d^2u'}{dt^2}=c\frac{d\theta}{dt},\quad \frac{d^2u}{dt^2}=-c\frac{d\theta}{dt}.$$

E questi valori sostituiti nell' equazione del moto la ridurranno a

$$\frac{d\theta}{dt}[Mk^2+(2m+\alpha)c^2]=g\alpha c\ ,$$

donde

$$\theta=\frac{g\alpha ct}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}.$$

Il moto del sistema sarà dunque uniformemente accelerato; ed il valore assoluto della velocità sarà tanto minore, per quanto α sarà più piccola rispetto a $2m$.

E sostituendo in fine l' ottenuto valore di θ nell' equazione $du'=c\theta dt$, avremo

$$u'=\int_0^t\frac{g\alpha c^2tdt}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{g\alpha c^2t^2}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}.$$

Or per la costruzione della macchina è dato di poter determinare il tempo, in cui la massa m' percorrerà un certo spazio u'; e così l' equazione precedente potrebbe dare il valore di g. Ma questo metodo non sarebbe per nulla comparabile a quello del pendolo, sì per la poca precisione con cui si possono definire u' e t, come ancora per essersi trascurati il peso del filo, la resistenza dell' aria e quella dell' attrito, attenuato ma non distrutto mercè le quattro ruote di sostegno.

Le differenze tra le forze impresse gm' e gm, e le forze effettive $m'\frac{d^2u'}{dt^2}$ ed $m\frac{d^2u}{dt^2}$ rappresentano le tensioni prodotte nei due capi del filo. Perciò chiamando T' e T queste tensioni, si ha

$$T'=m'\left(g-\frac{d^2u'}{dt^2}\right),\quad T=m\left(g-\frac{d^2u}{dt^2}\right);$$

e sostituendo alle due derivate $\frac{d^2u'}{dt^2}$ e $\frac{d^2u}{dt^2}$ i valori di sopra trovati , avremo

$$T'=gm'-\frac{gm'\alpha c^2}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}\,,\quad T=gm+\frac{gm\alpha c^2}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}\,.$$

Ma gm' e gm sono i pesi delle due masse m' ed m; in conseguenza la tensione è minore della carica nel capo di filo che discende, e maggiore nell' altro che ascende. Intanto la differenza

$$T'-T=g\alpha\left(1-\frac{(2m+\alpha)c^2}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}\right)$$

essendo una quantità positiva, dimostra che la tensione nel capo di filo discendente è maggiore che nell' altro; e questo eccesso vien prodotto dalla forza che il primo capo di filo deve trasfondere nella ruota principale.

Ed in fine osserviamo che l' asse di rotazione in vece di sostenere l' intera carica $g(M+m'+m)$, ne sopporta soltanto la porzione

$$g(M+m'+m)-\frac{g\alpha^2c^2}{Mk^2+(2m+\alpha)c^2}=gM+T'+T.$$

302. Indicando con m, m', m'',.... le masse degli elementi di un sistema, con x y z, x' y' z',... le coordinate che ne determinano il sito nella fine del tempo t; le componenti delle forze produttrici del loro effettivo movimento saranno

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\,,\; m'\frac{d^2x'}{dt^2}\,,\; m''\frac{d^2x''}{dt^2}\,,\ldots.$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}\,,\; m'\frac{d^2y'}{dt^2}\,,\; m''\frac{d^2y''}{dt^2}\,,\ldots.$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}\,,\; m'\frac{d^2z'}{dt^2}\,,\; m''\frac{d^2z''}{dt^2}\,,\ldots.$$

E chiamando inoltre X Y Z, X' Y' Z',... le componenti delle forze realmente applicate al sistema, dovrà pel principio

di D' Alembert esistere equilibrio tra le forze le cui componenti sono

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ X'' - m''\frac{d^2x''}{dt^2},\ \ldots\ldots$$
$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2},\ Y'' - m''\frac{d^2y''}{dt^2},\ \ldots\ldots$$
$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2},\ Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2},\ Z'' - m''\frac{d^2z''}{dt^2},\ \ldots\ldots$$

Quindi se dinotiamo con δx, δy, δz, $\delta x'$,... le variazioni avvenute nelle coordinate dei punti di applicazione delle forze in conseguenza di un infinitesimo spostamento del sistema dal luogo occupato alla fine del tempo t, il principio delle celerità virtuali (n° 84) ci darà l'equazione

$$(1)\quad \Sigma[(X - m\frac{d^2x}{dt^2})\delta x + (Y - m\frac{d^2y}{dt^2})\delta y + (Z - m\frac{d^2z}{dt^2})\delta z] = 0\,.$$

E mercè questa combinazione dei due principii, dovuta a Lagrangia, tutti i problemi dinamici si trovano sottoposti ad un metodo uniforme di soluzione, non altrimenti che l'equazione trovata nel n° 84 in se contiene tutta la Statica.

303. Se il sistema si compone di n elementi, l'equazione (1) conterrà $3n$ variazioni; le quali non possono essere tutte arbitrarie, stantechè non possiamo immaginare spostamento degli elementi del sistema, che non sia subordinato ai legami da cui sono congiunti. Ponendo che queste congiunzioni siano definite mercè un certo numero di equazioni

$$(2)\qquad L = 0\,,\quad M = 0\,,\quad N = 0,\ldots.,$$

egli è chiaro che le $3n$ variazioni contenute nell' equazione (1) dovranno soddisfare alle condizioni

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0 \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots. = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ma se le equazioni (2) sono in numero k, le equazioni (3) determineranno altrettante variazioni; e perciò nell' equazione (1) ne rimarranno $3n - k$ interamente arbitrarie. Quindi la stessa equazione dovrà necessariamente esser decomponibile in altre, che facilmente otterremo nel seguente modo.

Dopo aver moltiplicato le equazioni (3) per le indeterminte λ, λ', λ'',..., si addizionino coll' equazione (1); si pareggino a zero i coefficienti delle variazioni δx, δy, δz, $\delta x'$,..., e si avranno le $3n$ equazioni

$$(4)\quad\begin{cases} X - m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda\dfrac{dL}{dx} + \lambda'\dfrac{dM}{dx} + \lambda''\dfrac{dN}{dx} + \ldots = 0 \\ Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda\dfrac{dL}{dy} + \lambda'\dfrac{dM}{dy} + \lambda''\dfrac{dN}{dy} + \ldots = 0 \\ Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda\dfrac{dL}{dz} + \lambda'\dfrac{dM}{dz} + \lambda''\dfrac{dN}{dz} + \ldots = 0 \\ X' - m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} + \lambda\dfrac{dL}{dx'} + \lambda'\dfrac{dM}{dx'} + \lambda''\dfrac{dN}{dx'} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

k delle quali serviranno a definire le k indeterminate λ, λ', λ'',... E conosciute queste, ne sostituiremo i valori nelle rimanenti $3n - k$ equazioni; alle quali se aggiungiamo le equazioni (2), avremo $3n$ equazioni contenenti il tempo e le $3n$ coordinate degli elementi del sistema: potremo dunque definire il luogo di ciascun elemento per ogn' istante del tempo.

Questo modo, oltre all' uniformità che apporta nel processo del calcolo, è ancora utile per farci conoscere le tensioni che soffrono i legami del sistema, mercè la determinazione delle forze che potrebbero farne le veci. Ed in vero, considerando la natura dei termini, di cui si compongono le equazioni (4), egli è chiaro che immaginando la massa m come sciolta da ogni legame, essa non lascerebbe di essere in equilibrio se fosse animata dalle forze le cui componenti sono

$$\lambda\frac{dL}{dx},\quad \lambda\frac{dL}{dy},\quad \lambda\frac{dL}{dz},\quad \lambda'\frac{dM}{dx},\ldots\ldots$$

Similmente le forze che hanno per componenti

$$\lambda\frac{dL}{dx'},\quad \lambda\frac{dL}{dy'},\quad \lambda\frac{dL}{dz'},\quad \lambda'\frac{dM}{dx'},\ldots..$$

potrebbero sostituire i legami che congiungono la massa m' al resto del sistema; e così di tutti gli elementi che lo compongono. Queste forze, che sarebbero indispensabili per l'equilibrio delle masse m, m', m'',...., se fossero perfettamente libere, rappresentano colle loro componenti secondo le linee di congiunzione le tensioni che queste soffrono nel sosostituirne l' effetto.

304. Applichiamo questa teorica a determinare il moto di una catena omogenea che senz' attrito scorresse su due piani inclinati. Supponendo che la gravità sia la sola forza acceleratrice, e che la comune intersezione dei due piani sia orizzontale, il moto della catena si effettuirà in un piano perpendicolare allo spigolo dell' angolo diedro formato dagli altri due.

Chiamando x ed x' le lunghezze dei due capi della catena, π la massa dell' unità di lunghezza, φ e φ' gli angoli d' inclinazione dei due piani alla verticale; saranno $g\pi x\cos\varphi$ e $g\pi x'\cos\varphi'$ le forze impresse, $\pi x\,\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\pi x'\,\frac{d^2x'}{dt^2}$ le forze effettive. Quindi l' applicazione del principio delle celerità virtuali a quello di d'Alembert ci darà

$$(5)\qquad x\left(g\cos\varphi-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+x'\left(g\cos\varphi'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'=0.$$

Or supponendo che la catena sia inestensibile sotto l'azione del proprio peso, l' equazione esprimente l' unità dal sistema sarà

$$x+x'=l,$$

chiamando l la costante lunghezza della catena. Quindi le equazioni (3) si ridurranno alla sola

$$\delta x + \delta x' = 0 ,$$

che moltiplicata per λ, ed aggiunta alla (5) ci darà le due equazioni

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x(g\cos\varphi - \frac{d^2x}{dt^2}) + \lambda = 0, \\ & x'(g\cos\varphi' - \frac{d^2x'}{dt^2}) + \lambda = 0, \end{aligned} \right.$$

ossia (sostituendo nell' ultima ad x' il suo valore $l - x$)

$$x(g\cos\varphi - \frac{d^2x}{dt^2}) + \lambda = 0 ,$$

$$(l - x)(g\cos\varphi' + \frac{d^2x}{dt^2}) + \lambda = 0 ;$$

e da queste eliminando λ, avremo

$$(7) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}(\cos\varphi + \cos\varphi')(x - \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'}) ,$$

che sarà l' equazione esprimente il moto della catena.

Per integrarla poniamo

$$\frac{g}{l}(\cos\varphi + \cos\varphi') = a^2 \text{ ed } x - \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'} = y ;$$

avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2 y ,$$

donde

$$y = \alpha e^{at} + \beta e^{-at} ,$$

ed

$$x = \alpha e^{at} + \beta e^{-at} + \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'} .$$

Conoscendo la lunghezza x_0 del capo x e la velocità v_0 della catena nell' origine del tempo, avremo per determinare le costanti α e β le due equazioni

$$x_0 = \alpha + \beta + \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'}, \quad v_0 = a(\alpha - \beta);$$

e se la velocità iniziale fosse nulla, sarebbe $\alpha = \beta$.

Ponendo

$$x_0 = \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi}, \text{ e } v_0 = 0,$$

sarà $\alpha = \beta = 0$; e qualunque sia t, avremo

$$x = \frac{l\cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'}.$$

Questa equazione rappresenterà dunque la condizione di equilibrio della catena. E se in essa sostituiamo ad x l'equivalente espressione $l - x'$, avremo

$$x' = \frac{l\cos\varphi}{\cos\varphi + \cos\varphi'};$$

donde

$$x : x' = \cos\varphi' : \cos\varphi;$$

vale a dire che per ottenere l'equilibrio della catena le lunghezze dei due capi debbono essere direttamente proporzionali a quelle dei piani su cui poggiano.

Ed in fine osserviamo che i binomii $x(g\cos\varphi - \frac{d^2x}{dt^2})$ ed $x'(g\cos\varphi' - \frac{d^2x'}{dt^2})$ che si trovano nelle equazioni (6), rappresentano le forze perdute in virtù della congiunzione degli anelli; e che in conseguenza λ, la quale rappresenta un valore eguale ed opposto alla forza perduta, esprimerà la tensione che avrà luogo nel movimento.

303. Siano X,X',..Y,Y',..Z,Z',.. le forze applicate ai diversi punti di un sistema, ed $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$,.. $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m'\frac{d^2y'}{dt^2}$,

.. $m\frac{d^2z}{dt^2}$, $m'\frac{d^2z'}{dt^2}$,.. quelle che realmente concepiscono; avremo pel principio di D'Alembert

$$\Sigma(X - m\frac{d^2x}{dt^2}) = 0,\ \Sigma(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}) = 0\ ,\ \Sigma(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}) = 0;$$

donde

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X\ ,\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y\ ,\quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Ma le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro di gravità del sistema debbono soddisfare alle equazioni

$$x_1\Sigma m = \Sigma mx\ ,\ y_1\Sigma m = \Sigma my\ ,\ z_1\Sigma m = \Sigma mz\ ,$$

le quali differenziate due volte ci danno

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}\ ;$$

quindi sostituendo avremo

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma X,\ \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Y\ ,\ \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma Z.$$

Or queste equazioni sono quelle del moto di un punto materiale di massa Σm, definito dalle coordinate x_1, y_1, z_1 che si suppongono funzioni del tempo, ed animato dalle forze ΣX, ΣY, ΣZ. E poichè questo punto materiale coinciderebbe costantemente col centro di gravità del sistema, e le forze X, Y, Z sono quelle che ne sollecitano i diversi elementi, ne segue che volendo definire il moto del centro di gravità di un sistema, è d' uopo stabilirne il calcolo sull' ipotesi che tutte le forze agenti sul sistema fossero in quel punto trasportate parallelamente a loro stesse.

Laonde quelle forze del sistema, che trasportate al centro di gravità, ivi si facessero equilibrio, non prenderebbero alcuna parte nella produzione del suo moto, e se tut-

te soddisfacessero alla stessa condizione, il centro di gravità resterebbe in perfetta quiete. Or pel principio della *reazione eguale ed opposta all' azione* tutte le forze attrattive e ripulsive che si possono svolgere tra i diversi elementi di un sistema, e che vanno sotto la generica denominazione di *forze interiori*, si debbono considerare come eguali ed opposte tra loro; quindi la loro azione non potrà giammai produrre movimento alcuno nel centro di gravità del sistema. In conseguenza questo punto resterà continuamente in riposo, ovvero conserverà inalterata la sua velocità iniziale con un moto rettilineo ed uniforme.

306. Questo risultamento, conosciuto sotto il nome di *conservazione del moto del centro di gravità*, mena a parecchie importanti conseguenze.

— L' enorme distanza che separa il sistema planetario dalle stelle, fa che non possa riceverne azione sensibile: rimane perciò abbandonato alle sue forze interiori, ed alla velocità iniziale che potrebbe aver ricevuto. Se dunque il suo centro di gravità avrà un movimento, questo non potrà essere che rettilineo ed uniforme.

— La trasfusione del moto per mezzo dell' urto, le esplosioni, le contrazioni muscolari, ecc., non essendo che giuoco di forze interiori, non possono cangiare il moto del centro di gravità del sistema, in cui avvengono. Quindi — 1° il comune centro di gravità di più corpi che insieme si urtano, avrà lo stesso moto sì prima che dopo l' urto; — 2° il moto del centro di gravità di una bomba, che scoppia nel suo tragitto, si conserverà qual era prima dell' esplosione, finchè alcuna delle sue parti non venga ad incontrare un qualche ostacolo; — 3° l' uomo e tutti gli animali dotati di locomozione non potrebbero colla volontà dar moto al loro corpo, se non intervenisse una forza esteriore, qual' è l' attrito che i loro piedi incontrano sulla superficie del suolo, o la resistenza dell' aria pei volatili e quella dell'acqua pei pesci. Quindi comprendiamo come sopra un suo-

lo sommamente sdruccevole ci sia impossibile il camminare.

— Allorchè le parti di un sistema si separano a vicenda per azione che tra esse si svolge, il loro comune centro di gravità deve necessariamente rimanere in riposo. Così nella scarica di un' arma da fuoco il centro di gravità comune al proietto ed all' arma resterebbe in perfetta quiete se non intervenissero le azioni esteriori della resistenza dell' aria e dell' attrito che l' arma incontra nel suo moto; e quantunque le due opposte quantità di moto non siano perciò eguali, purtuttavia nella tendenza del centro di gravità al riposo si trova la ragione del rinculamento dell' arma nell' atto della scarica.

307. Nè di solo moto di traslazione, ma di quello di rotazione ancora sono improduttive le forze interiori di un sistema; stantechè quella reazione sempre eguale ed opposta all' azione, che ne costituisce l' effetto immancabile, fa sì che la somma dei loro momenti debba esser nulla per ogni punto dello spazio che si vorrà considerare come origine.

Nè valgono meglio a produrre moto di rotazione intorno ad un punto fisso, quando esse sono attrazioni o ripulsioni da quel punto. Imperocchè chiamando X, Y, Z le loro componenti rispetto a tre assi rettangolari che hanno origine nel centro di azione, avremo

$$X : Y : Z = x : y : z;$$

donde

$$Zy - Yz = 0\,,\ Xz - Zx = 0\,,\ Yx - Xy = 0;$$

vale a dire che i loro momenti saranno nulli rispetto a quel centro.

Or per questi risultamenti e per quelli ottenuti nel n° precedente egli è facile vedere come le rotazioni planetarie, i giri delle comete e le immense orbite descritte dalle stelle

doppie non possono esser state prodotte dalle forze proprie della materia cosmica.

308. Se le forze, le cui componenti rispetto agli assi sono

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

debbono essere in equilibrio pel principio di D'Alembert; egli è necessario (n° 55) che non solo le loro somme, ma quelle ancora dei loro momenti siano nulle. Avremo così le tre equazioni

$$\Sigma\left[y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) - z\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0,$$
$$\Sigma\left[z\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] = 0,$$
$$\Sigma\left[x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0;$$

le quali, trasformate nel seguente modo

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy - Yz),$$
$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx),$$
$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx - Xy),$$

dimostrano che in tutta la durata del moto sarà la somma dei momenti delle forze effettive eguale a quella dei momenti delle forze impresse.

Ma se le forze acceleratrici agenti sul sistema sono interiori, come quelle che consistono in mutue attrazioni o ripulsioni, o che si svolgono per urti, esplosioni, ecc., ovvero ch' essendo esteriori, abbiano un centro nel punto che si è preso per origine; o in fine, che manchino interamente, perchè il sistema, messo una volta in moto, si è

poi abbandonato a se medesimo ; in tutti questi casi i secondi membri delle equazioni precedenti saranno nulli in tutta la durata del moto , ed avremo

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$
$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0,$$
$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0.$$

Le quali integrate ci daranno

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c,\\ &\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c',\\ &\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c''. \end{aligned}\right.$$

Or indicando $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ le velocità della massa m secondo gli assi ,

$$m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt}$$

esprimeranno le componenti , e

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\ m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right),\ m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

i momenti della forza impulsiva posseduta dalla massa m , e che avrà necessariamente acquistata nell' origine del suo moto. E poichè le equazioni precedenti ci mostrano che le somme dei momenti delle forze sono costanti rispetto agli assi coordinati , tali dovranno essere ancora per un asse qualunque.

Laonde : *la somma dei momenti delle forze primitiva-*

mente impresse ad un sistema di corpi, comunque agenti gli uni verso degli altri, rimarrà costante rispetto ad ogni asse in tutta la durata del moto, qualunque cangiamento graduato o subitaneo sia per avvenire nei singoli moti dei corpi, sia per loro mutua azione, sia per qualunque nuovo legame tra essi introdotto.

309. Se in tutta la durata del moto la somma anzidetta rimane costante per un asse qualunque, purtuttavia non sarà la stessa per tutti gli assi che si potranno condurre per una data origine. Imperocchè determinato l' asse del momento risultante G, s' immagini per la stessa origine condotta una retta la quale faccia con quell'asse un angolo φ: sarà $G\cos\varphi$ la somma dei momenti rispetto al nuovo asse; e poichè il più grande valore di $\cos\varphi$ si ha nell' ipotesi di $\varphi = 0$, sarà l' asse di G quello del momento massimo.

Or dalle funzioni $\Sigma(Zy - Yz)$, $\Sigma(Xz - Zx)$, $\Sigma(Yx - Xy)$, le quali esprimono le somme dei momenti rispetto a tre assi dati, si rileva che rimanendo invariati i punti di applicazione e le direzioni e grandezze delle forze, il momento risultante, eccetto il caso della riduzione di tutte le forze ad una coppia, dovrà variare insieme al sito dell' origine. Quindi l' asse del momento massimo dovrà in generale mutar grandezza e direzione, quando l'origine verrà trasportata da un punto all' altro dello spazio. Rimovendo dunque l' origine all' infinito, anche infinitamente grande sarà il momento risultante, e perciò non sarà assegnabile il suo valore *massimo tra i massimi.*

Potremo purtuttavia definirne il valore *minimo dei massimi.* Ed in vero, se immaginiamo tale posizione dell' origine che la risultante delle forze ivi applicate riesca parallela all' asse del momento risultante, allora rimovendola dal suo sito verrà prodotta una coppia, il cui asse sarà perpendicolare a quello del momento risultante, e che componendosi con questo darà un momento più grande di ciascuno dei due componenti; è dunque *minimo dei massimi* quel mo-

mento risultante che ha l' asse parallelo alla risultante delle forze applicate all' origine.

Sia O (*fig. 147*) il luogo dell' origine; e la risultante delle forze ivi applicate e l' asse del momento risultante siano rappresentati in grandezza e direzione dalle rette OR, OG. Poichè per avere la direzione dell' asse di minimo momento fa d' uopo rimuovere l' origine, finchè la risultante delle forze ad essa applicate si confonda coll' asse del momento risultante, egli è chiaro che la coppia generata nel moto dell' origine dovrà avere l' asse giacente nel piano ROG e perpendicolare ad OR. Si conduca dunque da G la perpendicolare GK alla retta OR, dal punto O si elevi sulla stessa retta la perpendicolare OL, e da K si meni KL parallela ad OG: sarà OL il momento Rr della coppia prodotta dalla trasposizione dell' origine, ed OK rappresenterà in grandezza e direzione il minimo momento richiesto.

Chiamando φ l' angolo ROG, G il momento risultante e K il momento minimo, avremo pel teorema del parallelogrammo

$$K = G\cos\varphi\ ,\quad Rr = G\mathrm{sen}\varphi\ ;$$

quindi

$$r = \frac{G\mathrm{sen}\varphi}{R}\ .$$

Or il braccio r del momento Rr dovendo essere perpendicolare al suo asse OL ed alla componente OR della coppia, sarà perpendicolare ancora al piano ROG; quindi se pel vertice dell' angolo φ e perpendicolarmente al suo piano conduciamo la $r = \frac{G\mathrm{sen}\varphi}{R}$, l' estremo di questa retta segnerà il luogo della nuova origine, che renderà la risultante delle forze che vi sono applicate, parallela all' asse del momento risultante.

Elevando a quadrato le due equazioni $K = G\cos\varphi$, $Rr = G\mathrm{sen}\varphi$, e prendendone la somma, avremo

$$G^2 = K^2 + Rr.$$

Quindi se intorno all' asse OR di minimo momento immaginiamo descritta una superficie cilindrica a base circolare di raggio r, tutt' i punti di essa superficie saranno origini di momenti massimi eguali; e perciò si è denominato *asse centrale* quello di minimo momento.

Se le stesse equazioni si dividano l' una per l' altra, si avrà

$$\tang\varphi = \frac{Rr}{K},$$

e sarà così definito l' angolo, che tutti gli assi di massimo momento e che sono alla distanza r dall' asse centrale, formano con quest' ultimo.

In fine osserviamo che se tutti le forze del sistema sono riducibili ad una coppia, sarà $R = 0$, $\tang\varphi = 0$ qualunque sia r, e $G = K$; in conseguenza tutti gli assi di massimo momento saranno allora eguali e paralleli. E se invece tutte le forze sono riducibili ad una sola, sarà $K = 0$, dovendo essere $\varphi = 90^\circ$. Quindi un vero momento minimo tra i massimi non avrà realmente luogo, se non quando tutte le forze del sistema non sono altrimenti riducibili che a due non giacenti in un solo piano.

310. Ritorniamo alle somme

$$\Sigma m(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}),\ \Sigma m(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}),\ \Sigma m(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}),$$

ed intendiamole estese a tutte le molecole di una delle masse m componenti il sistema. Avremo così

$$\Sigma m(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}) = \int(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt})dm,$$

$$\Sigma m(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}) = \int(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt})dm,$$

$$\Sigma m(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}) = \int(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dm.$$

Or siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro di gravità della massa m, e ξ, η, ζ quelle di una sua molecola dm rife-

rita allo stesso centro come origine, avremo

$$x = x_1 + \xi\,,\quad y = y_1 + \eta\,,\quad z = z_1 + \zeta\,,$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\,,\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\,,\quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\,.$$

Sostituendo questi valori negl' integrali precedenti, ed osservando che posta l' origine delle ξ, η, ζ nel centro di gravità dovranno essere

$$\int \xi dm = 0\,,\quad \int \eta dm = 0\,,\quad \int \zeta dm = 0\,,$$

ed in conseguenza

$$\int \frac{d\xi}{dt} dm = 0\,,\quad \int \frac{d\eta}{dt} dm = 0\,,\quad \int \frac{d\eta}{dt} dm = 0\,,$$

avremo

$$\int (y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt})dm = \int (y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt})dm + \int (\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt})dm$$

$$\int (z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt})dm = \int (z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt})dm + \int (\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt})dm$$

$$\int (x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dm = \int (x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt})dm + \int (\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt})dm.$$

Ed estendendo in fine queste sommatorie a tutte le masse del sistema, ne otterremo (n° 308)

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma\left[m(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}) + \int (\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt})dm\right] = c \\ \Sigma\left[m(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}) + \int (\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt})dm\right] = c' \\ \Sigma\left[m(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}) + \int (\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt})dm\right] = c''. \end{cases}$$

Or l' elemento dell' area di una curva piana, riferita a coordinate polari, essendo espresso da $\frac{1}{2}r^2\theta$, ed essendo

$tang\theta = \frac{y}{x}$, sarà

$$d\theta = \frac{d.tang\theta}{1+tang^2\theta} = \frac{ydx - xdy}{r^2};$$

ed

$$\tfrac{1}{2}r^2 d\theta = \tfrac{1}{2}(ydx - xdy).$$

Laonde se immaginiamo condotto un raggio vettore al centro di gravità di ciascuna massa m del sistema, le espressioni

$$\Sigma m(y_1 dz_1 - z_1 dy_1),\ \Sigma m(z_1 dx_1 - x_1 dz_1),\ \Sigma m(x_1 dy_1 - y_1 dx_1)$$

dinoteranno il doppio delle somme dei prodotti di ciascuna massa per le proiezioni su i piani coordinati dell' elemento di area descritta dal corrispondente raggio vettore. Perciò indicando con λ, λ', λ'' le suddette proiezioni avremo

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma m(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}) = \Sigma m \frac{d\lambda}{dt}, \\ \Sigma m(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt}) = \Sigma m \frac{d\lambda'}{dt}, \\ \Sigma m(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}) = \Sigma m \frac{d\lambda''}{dt}. \end{cases}$$

E similmente indicando con λ_1, λ'_1, λ''_1 le proiezioni delle somme delle aie descritte dalle molecole di ciascuna massa intorno al proprio centro di gravità, otterremo

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma[\int(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt})dm] = \Sigma(\int \frac{d\lambda_1}{dt} dm) \\ \Sigma[\int(\zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt})dm] = \Sigma(\int \frac{d\lambda'_1}{dt} dm) \\ \Sigma[\int(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt})dm] = \Sigma(\int \frac{d\lambda''_1}{dt} dm). \end{cases}$$

Le tre equazioni (10) esprimendo le somme delle proiezioni delle aree descritte dagli elementi delle masse nei moti

di traslazione dei corpi componenti il sistema, e le equazioni (11) le analoghe somme pei moti di rotazione dei medesimi corpi; egli è chiaro che sostituendone i secondi membri nelle equazioni (9), queste ci daranno l'espressione algoritmica del seguente principio.

Per un sistema di corpi in moto, e non sottoposto all' azione acceleratrice di alcuna forza esteriore, la somma delle projezioni delle aie, descritte dalle molecole del sistema, su i tre piani coordinati, e quindi la somma delle proiezioni delle stesse aie sopra un piono qualunque, sarà costante per una stessa durata di tempo, presa in qualsivoglia epoca del moto.

311. Questo teorema è conosciuto sotto il nome di *principio della conservazione delle aie*: ed esso non è che l'interpretazione dinamica delle equazioni (8), le quali nel loro significato statico ci han dato il *principio della conservazione dei momenti*. Questo principio adunque considera il moto nelle sue cagioni, l'altro lo riguarda nell'attuazione dell'effetto; e perciò essi non sono che due diversi enunciati di un medesimo teorema. Potremo dunque applicare al suo enunciato dinamico le leggi trovate rispetto alla sua forma statica; e così avremo

— 1° Che dovrà esservi un piano di *massima aia*, come abbiamo un asse di *massimo momento;* e l'inclinazione di un tal piano a quello delle coordinate sarà data per mezzo delle stesse determinazioni trigonometriche che definiscono il sito dell'asse di massimo momento: avvertendo purtuttavia che il piano di una data aia dovrà esser sempre perpendicolare all'asse del corrispondente momento.

— 2° Che l'aia sopra un piano inclinato dell'angolo φ a quello dell'aia G, avrà per espressione $G\cos\varphi$. Quindi le aie saranno eguali su tutti i piani egualmente inclinati a quello dell'aia massima.

— 3° Che tra i piani di massima aia, condotti per diversi punti dello spazio, vi sarà quello che presenterà l'aia

minima tra le massime ; ed il punto , pel quale dovrà esser condotto , verrà determinato nello stesso modo che l'origine pel momento di analoga denominazione.

Dalle quali cose si rileva che se ad un medesimo piano corrisponderà sempre una stessa aia , potrà viceversa una medesima aia appartenere a diversi piani , a meno che non sia l' aia minima tra le massime , il cui piano è invariabile. E poichè questo piano dovrà esser perpendicolare all' asse della stessa denominazione , il quale asse già sappiamo dover essere parallelo alla risultante di tutte le forze del sistema , ne segue che la determinazione di quel piano suppone necessariamente nota la direzione di questa risultante. Ma

$$G^2 = R^2 r^2 + K^2$$

esprimendo la relazione che unisce la grandezza di essa risultante , la sua distanza dall' origine a cui corrisponde l' aia massima G , ed il valore dell' aia minima k ; ne segue che facendò astrazione dal moto del centro di gravità del sistema , al quale centro era costantemente applicata la risultante di tutte le forze , sarà sempre G = K. Ponendo dunque l' origine nel centro di gravità del sistema il corrispondente piano dell' aja massima rimarrà sempre parallelo a se stesso , e costituirà il solo piano immutabile a cui si potranno riferire le posizioni di tutti gli elementi del sistema.

Or tutto cangia intorno a noi. La terra che abitiamo è trasportata da un doppio moto intorno al sole, il quale non è immobile nello spazio ; e le stelle , che sono i punti di ritrovo per l'astronomo, non sono fisse che in apparenza al nostro debole sguardo. Non potremmo dunque neppur col mezzo di osservazioni astronomiche eseguite a grandi intervalli di tempo , conoscere se fosse mai avvenuto un qualche notevole cangiamento nel sistema mondiano , se la Meccanica razionale scovrendo l' invariabilità del piano di massima aia rispetto al centro di gravità del mondo planetario ,

non ci avesse offerto un luogo fisso a cui poter' riferire gli svariati movimenti del cielo.

CAPO DODICESIMO.

Delle forze vive.

Misura delle forze proposta dal Cartesio — Obbiezione del Leibnizio, e distinzione delle forze in *vive e morte* — Le forze vive danno la misura del lavoro — Lavoro positivo e negativo. Lavoro elementare e totale — Il lavoro della risultante è eguale alla somma algebrica dei lavori delle componenti — Teorema sulle forze vive. Sua espressione algoritmica. Conseguenze che ne derivano — Applicazione del principio delle forze vive al moto delle macchine. Esse si compongono in generale di tre diversi sistemi. Distinzione del lavoro delle macchine in motore e resistente. Effetto utile delle macchine. Ufficio che vi fanno il regolatore ed il volante — Conclusione.

312. Allorchè Cartesio intuiva la presenza di una forza in ogni moto attuato o virtuale [1], la supponeva proporzionale

[1] La Scuola distinguendo il moto in *circolare* e *rettilineo*, riguardava il primo come conseguenza della natura dei corpi che lo concepiscono, e nel secondo soltanto vedeva l'effetto di una forza, ma impulsiva. Il moto dei pianeti, che allora si supponeva circolare, era in conseguenza un semplice effetto della loro natura; quindi si rileva come gli astronomi antichi potessero moltiplicare epicicli a loro bell'agio, senza darsi il menomo pensiero della prodigiosa quantità di forze che all' uopo sarebbe bisognata. Cartesio pel primo vi scorgeva l' effetto di una forza, immaginandola nell'azione di un vortice; e questa ipotesi, passata in proverbio d' idea fantastica, fu non pertanto un concetto ardito, immenso, nunzio della Meccanica celeste; fu lo sguardo di un ingegno superiore che vedendo la possibilità di una scienza nuova, volle iniziarla cogli elementi possibili in quel tempo; imperocchè limitata l' idea di forza al solo concetto d' impulso, non altra ipotesi che quella dei vortici poteva farne comprendere il modo di esistenza nei movimenti celesti.

alla velocità prodotta nell' unità di massa; e così divinava il vero principio della Dinamica razionale.

Più tardi Leibnizio — in uno scritto pubblicato negli Atti di Lipsia pel 1686 sotto il titolo: *Demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum* — stabiliva la distinzione delle forze in *vive* e *morte*, dicendo *vive* le forze che producono movimento, e *morte* quelle che tendono soltanto a produrlo. Concedeva che queste seguissero la misura cartesiana; ma sosteneva che le prime dovessero stimarsi a norma dei quadrati delle velocità prodotte. E ciò deduceva da un ragionamento che può stringersi nei seguenti termini — È noto che le velocità acquistate dai gravi sono proporzionali alle radici quadrate delle altezze donde discendono; ed è noto ancora che se queste velocità fossero loro comunicate dal basso in alto, li farebbero risalire all' altezza da cui sono caduti; ma le forze motrici debbono essere proporzionali alle altezze a cui possono far salire un medesimo grave; dunque le forze motrici o *vive* debbono esser proporzionali ai quadrati delle velocità prodotte.

Tutto il nerbo di questo ragionamento sta nella proposizione: *le forze motrici debbono essere proporzionali alle altezze a cui possono far salire un medesimo grave*. La quale non essendo nè evidente nè dimostrata, fu vivamente oppugnata dai seguaci di Cartesio. Leibnizio cercò di ribattere le loro obbiezioni, e così ebbe origine una controversia che sul cominciare dello scorso secolo venne agitata tra i geometri più solenni di quel tempo [1]. Nè questa controversia era in fondo *una semplice quistione di parole*, co-

[1] Il lettore che amasse conoscere quali sorte di argomentazioni le due parti a vicenda si opponessero, ne troverebbe sufficiente ragguaglio nel 1° tomo degli *Elementi di Fisica* di Madama Duchâtelet, ultraleibniziana, ed in una dissertazione che trovasi nella *Meccanica generale* dell'ab. Deidier pubblicata in Parigi nel 1741.

me pretendeva il D'Alembert che con questo motto seppe ridurre le due parti di silenzio; era invece una quistione capitale per la Dinamica razionale, alla quale tornò utilissima, come quella che sottoponendo a severo esame le sperienze dinamiche escogitate dalle due parti, potè finalmente far rilevare che l'ipotesi cartesiana sia la vera espressione della dipendenza che realmente esiste tra l'energia della forza e la grandezza della velocità prodotta [1].

313. Che il prodotto della massa del quadrato della velocità non esprima l'energia di veruna forza, ciò risulta chiaramente dai principii esposti nel 1° capo di questo libro. Intanto il concetto leibniziano ha la sua realtà obbiettiva, e questa è di sommo interesse. Imperocchè ogni utilità che l'industria umana potrà mai ottenere dall'impiego delle forze naturali, starà sempre nel *lavoro* di esse forze, vale a dire nella somma delle resistenze vinte pel loro mezzo. Or l'azione di una forza vincendo una resistenza, trasporta necessariamente il suo punto di applicazione per un certo spazio: così l'uomo che pone a profitto la sua forza innalzando pietre per mezzo di un argano, non altrimenti vi giunge che spingendo, mercè la contrazione muscolare delle sue braccia, il punto della macchina al quale applica la sua mano. Egli potrà per avventura applicarla con maggiore o minor vantaggio, e quindi far un'economia più o meno grande della sua forza; ma ciò non influirà per nulla sul prezzo del suo lavoro, che sarà sempre valutato se-

[1] *Il est rare*, dice il Montucla all'occasione della controversia sulle forze vive, *de voir les mathématiciens disputer sur les principes; c'est cependant se qu'on vit, avec une sorte de scandale, vers le commencement du dix-huitième siècle et pendant quarante ans.* Montucla non aveva dunque compresa la vera natura della quistione, la quale non verteva su principio matematico, ma sulla determinazione di un dato essenzialmente empirico, e che doveva esser la base su cui il Calcolo e la Geometria dovevano costruire la Dinamica razionale.

condo la ragion composta della quantità del peso e dell' altezza a cui verrà innalzato. E ciò che abbiamo osservato in questo esempio particolare, ha realmente luogo in tutte le applicazioni che l' industria sa fare degli agenti naturali, il cui valore non seguirà giammai la ragione della loro energia, ma sibbene quella delle resistenze vinte pel loro mezzo. Or considerando le forze sotto questa veduta di pratica utilità, siamo naturalmente condotti al principio delle forze vive. Ed in vero, continuando sullo stesso esempio messo innanzi, chiamiamo P il peso della pietra e ds l' altezza a cui l' operaio l' avrà innalzata nel tempo dt; sarà Pds un' espressione proporzionale alla resistenza superata nell' elemento di tempo, e che potrà in conseguenza rappresentarne la misura. Ma se indichiamo con m la massa in cui risiede il peso P, questa forza potrà essere ancora espressa da $m\frac{d^2s}{dt^2}$: avremo così

$$Pds = m\frac{d^2s}{dt^2}ds = \tfrac{1}{2}md\frac{ds^2}{dt^2} = \tfrac{1}{2}d.mv^2$$

donde

$$\int Pds = C + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

E supponendo che v ed s divengano nulli ad un tempo, sarà $C = 0$, e

$$\int Pds = \tfrac{1}{2}mv^2;$$

vale a dire che il lavoro eseguito da una forza durante il tempo t, sara proporzionale al quadrato della velocità prodotta nello stesso tempo. Laonde se il principio leibniziano non conviene alla ragione di energia delle forze, è per lo meno esatto quando si cerca di misurarne il lavoro. Perciò ben si apponeva il Mongolfier, quando diceva che la *forza viva* è quella che si paga.

313. Nell' esempio qui sopra addotto abbiamo supposto che il moto del punto di applicazione di una forza si at-

tuasse nella linea della sua direzione; ma potrebbe divergerne, sia perchè distratto dai legami che lo congiungono agli altri punti del sistema; sia perchè impedito da cagioni esteriori. Così l' ala di un mulino va per la direzione del vento in quel solo istante in cui la incontra ad angolo retto; e la resistenza che un piano inclinato oppone alla libera caduta di un grave, lo fa continuamente divergere dalla linea verticale.

Nei casi di questa specie sarà d' uopo decomporre la forza in due, l' una diretta secondo la linea che il punto di applicazione realmente percorre, e l' altra che le sia perpendicolare: la prima avrebbe essa sola prodotto il lavoro eseguito dalla forza data, stantechè sotto l' azione della componente normale il punto di applicazione della forza non avrebbe abbandonato il luogo iniziale. Sia M (*fig. 148*) questo punto, ed MM_1 lo spazio percorso in un elemento di tempo sotto l' azione della forza MP. Ponendo l' angolo $PMM_1 = \alpha$ ed $MM_1 = ds$, saranno $P_1 = P\cos\alpha$ e $P_2 = sen\alpha$ le due componenti della forza P; ed il suo *lavoro elementare*, ossia il lavoro attuato in un elemento di tempo, sarà espresso da

$$P_1 ds = P\cos\alpha ds.$$

Ma $\cos\alpha ds$ è la proiezione di MM_1 sulla direzione della forza; dunque il lavoro elementare di una forza sarà misurato dal prodotto della sua quantità pel cammino che nel senso della direzione della forza percorre il suo punto di applicazione.

Da ciò si rileva — 1° Che se α è un angolo ottuso (*fig. 149*) il cammino MM_1 eseguito dal punto di applicazione della forza P_1 non sarà stato effetto della sua azione, per la quale avrebbe avuto in vece l' opposta direzione. Quel cammino sarà stato il prodotto di un' altra forza, e la P sarà intervenuta come una resistenza da vincersi: il suo lavoro in conseguenza sarà stato negativo, e perciò espresso da $-P\cos\alpha ds$.

— 2.° Che se una forza costante vada sempre diretta secondo la tangente alla curva descritta dal suo punto di applicazione, il suo *lavoro totale*, ossia il lavoro compiuto in un tempo finito, sarà misurato dal prodotto della quantità della forza per lo spazio percorso dal suo punto di applicazione. E questo spazio sarebbe sostituito dalla sua proiezione sulla direzione della forza, se questa rimanesse costantemente parallela a se medesima.

Eccetto questi semplicissimi casi il loro lavoro totale di una forza sarà dato da $\int_{s_0}^{s} P_t ds$.

315. Se poi più forze agiscano sopra un punto materiale, il loro lavoro verrà determinato per mezzo del principio che la proiezione della risultante di più forze sopra una data retta deve pareggiare la somma algebrica delle proiezioni delle componenti. Ed in vero, essendo X, Y, Z le componenti delle forze secondo gli assi, α β γ gli angoli che esse fanno con una retta menata per l'origine, e φ l'angolo che vi farà la risultante R del sistema, avremo

$$R\cos\varphi = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma;$$

e moltiplicando i due membri per ds, che supponiamo esser lo spazio descritto dal punto di applicazione delle forze sulla linea di proiezione, ne risulta

$$R\cos\varphi ds = X\cos\alpha ds + Y\cos\beta ds + Z\cos\gamma ds;$$

vale a dire che il lavoro della risultante di più forze agenti sopra un punto materiale è sempre eguale alla somma algebrica dei lavori delle componenti.

Ma

$$X\cos\alpha ds + Y\cos\beta ds + Z\cos\gamma ds = Xdx + Ydy + Zdz;$$

dunque

$$\int_{s_0}^{s} R\cos\varphi ds = \int_{s_0}^{s} (Xdx + Xdy + Zdz) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mw^2 \text{ (n° 170)};$$

e perciò il lavoro totale della risultante di più forze agenti sopra un punto materiale in moto, è eguale alla metà dell' aumento di forza viva ottenuto nello stesso tempo.

316. Or supponiamo che per ciascuno dei punti di un sistema in moto si scriva l' equazione precedente, che costituisce il *principio delle forze vive*, e che di tutte le equazioni così ottenute si prenda la somma, addizionandole membro a membro; ne risulterà una nuova equazione che estenderà al moto dei sistemi il principio delle forze vive, formolandolo nel seguente modo:

In ogni sistema di punti materiali in moto, la somma dei lavori eseguiti in un certo tempo dalle forze applicate ai diversi punti del sistema, sarà eguale alla metà dell' incremento di forza viva ottenuto nello stesso tempo.

Avremo dunque l' equazione

$$\int \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2,$$

dalla quale derivano i seguenti teoremi.

— 1.° Se in un certo istante del tempo il sistema ha tali relazioni colle forze agenti, che rimarrebbe in equilibrio, se gli elementi che lo compongono, non avessero acquistato una certa velocità; pel luogo allora occupato dal sistema sarà (n° 84)

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0\,;$$

ed in conseguenza $\Sigma mv^2 - \Sigma mw^2$ ivi sarà un ***massimo*** o un ***minimo***, secondochè stabile o instabile sarebbe l' equilibrio che il sistema avrebbe in quel dato luogo.

Or se in una certa posizione del sistema le forze applicate ai suoi diversi punti si fanno equilibrio, ivi potremo ridurle a due sole forze eguali ed opposte. Siano P e Q *(fig. 150)* queste due forze; A e B i loro punti di applicazione, i quali nell' elemento di tempo, che immediatamente segue all' istante dell' equilibrio, siano trasportati in A' e B'. In questo movimento la forza Q eseguirà il lavoro

$Q.Bb$, e $-P.Aa$ sarà quello della forza P. La somma dei loro lavori sarà dunque

$$Q(Bb - Aa) = Q(ab - AB).$$

Facciamo $AB = r$; sarà $A'B' = r + dr$. E poichè si suppone una traslazione infinitamente piccola, avremo colla differenza di un infinitesimo del 2° ordine $ab = A'B'$; quindi $ab - AB = dr$, e

$$Q(ab - AB) = Q.dr.$$

Se le due forze P e Q tendessero ad avvicinare i loro punti di applicazione, dr sarebbe negativo e lo stesso segno avrebbe il lavoro risultante.

Dunque due forze, che si fanno equilibrio sopra un corpo estensibile ed in moto, daranno un lavoro risultante positivo o negativo, secondochè esse tenderanno di allontanare od avvicinare i loro punti di applicazione. Quindi il lavoro risultante sarebbe nullo, se il corpo fosse perfettamente rigido.

Un lavoro positivo accrescendo la somma delle forze vive di un sistema in moto, ed un lavoro negativo diminuendola; ne segue che se un gas forma parte del sistema, esso ne accrescerà la somma delle forze vive colla sua espansione, e la diminuirà colla contrazione.

— 2.° Se X, Y, Z sono nulle, $\Sigma mv^2 - \Sigma mw^2$ sarà costante. Dunque la somma delle forze vive di un sistema rimane inalterata, finchè non interviene un' azione esteriore. E di questo teorema, conosciuto sotto il nome di ***principio della conservazione delle forze vive***, ne abbiamo veduto un caso nel n° 260.

— 3.° Se $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ è un differenziale esatto di una certa funzione φ delle coordinate $x\ y\ z,\ x'\ y'\ z'$, ecc. dei diversi punti del sistema, sarà

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2 = \varphi(x,y,z,x',\ldots) - \varphi(a,b,c,a',\ldots).$$

Quindi la somma delle forze vive acquistate dal sistema nel suo passaggio dal luogo $(a,\ b,\ c,\ a',\ldots)$ al luogo $(x,\ y,\ z,\ x',\ldots)$,

ed in conseguenza la somma dei lavori eseguiti dalle forze applicate, sarà indipendente dalla via percorsa dai diversi punti del sistema e dal tempo impiegato in percorrerla. Così qualunque sia la natura della traiettoria seguita da un grave nel discendere da una certa altezza, la gravità eseguirà sempre la stessa quantità di lavoro.

Da questa indipendenza segue ancora che la somma delle forze vive del sistema dovrà risultare sempre la stessa, ogni volta che i suoi diversi punti ritorneranno ai medesimi luoghi. Or le forze che si svolgono nell' atto dell' urto rendono $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ un differenziale esatto, poichè sono funzioni delle distanze frapposte alle molecole dei corpi (n° 170). E se questi sono elastici perfettamente, le loro molecole, dopo aver patito la massima divergenza dalle loro naturali posizioni durante la trasfusione della forza che s'imprime coll'urto, ritorneranno alle prime posizioni mercè la susseguente reazione operata dall' elaterio. Perciò la somma delle forze vive che esse possedevano prima dell' urto, dopo di questo dovrà ritornare la stessa. Dunque nell' urto dei corpi perfettamente elastici non vi è perdita di forza viva.

Questo risultamento, che qui si presenta sotto forma di corollario, può esser direttamente dimostrato mercè il principio trovato nel 1° teorema di questo numero sul lavoro positivo o negativo di due forze che a vicenda si equilibrano. Ed in vero, quando due corpi vengono ad urtarsi, essi a vicenda si comprimono; e le loro molecole prossime al luogo del contatto, si addenseranno sempreppiù le une sulle altre, finchè i due corpi non abbiano preso una velocità comune. In tutto questo primo periodo dell' urto vi sarà dunque produzione di lavoro negativo, e quindi diminuzione di forza viva. Ma se i corpi fossero perfettamente elastici, all' addensamento delle molecole terrebbe dietro un' eguale ed opposta dilatazione; ed il lavoro positivo che così verrebbe attuandosi, compenserebbe esattamente la perdita avvenuta nella somma delle forze vive. Or tutti i solidi naturali sono

più o meno elastici, ma non se ne conosce alcuno che lo sia perfettamente; quindi l'urto vi produrrà sempre una perdita di forza viva, tanto più grande per quanto sarà meno perfetta la loro elasticità.

317. La teorica delle forze vive, come quella che offre un mezzo di comparazione pei lavori eseguiti dalle diverse forze, costituisce la naturale transizione dalla Meccanica razionale alla Meccanica applicata alla macchine; vale a dire dallo studio delle forze, come primo elemento della Filosofia Naturale, alla ricerca dei modi con cui possiamo rivolgerle a soddisfazione dei nostri bisogni.

318. Ogni macchina si compone di tre sistemi differenti. Il *sistema ricettore* riceve in se la forza che gli comunica il motore; il *sistema operatore* fa che agisca sulla resistenza da superarsi; ed il *sistema conduttore* la trasporta dal primo al secondo. In un mulino ad acqua, a cagion di esempio, la ruota idraulica costituisce il sistema ricettore; nella mola sta l'operatore destinato a vincere la coesione delle molecole negli acini di frumento o di altra materia che voglia ridursi in polvere; e le ruote dentate, che trasportano il moto dalla ruota idraulica alla mola, costituiscono il sistema conduttore.

Il lavoro della forza motrice che con questa farà sempre un angolo acuto, ed il lavoro resistente che all'opposto s'inclina ad angolo ottuso colla forza che la macchina è destinata a superare, dovranno esser distinti da contrarii segni; perciò ritenendo come positivo il lavoro motore che indichiamo con Lm, avremo per negativo il lavoro resistente Lr. Le quali notazioni introdotte nella formola generale del principio delle forze vive ci daranno per la teorica delle macchine in moto l'equazione fondamentale

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv'^2 = 2(\mathrm{L}m - \mathrm{L}r).$$

319. Or l'effetto del lavoro resistente essendo quello di assorbire una parte almeno del lavoro motore, egli è chiaro che dovranno andare in conto del primo lavoro tutte quel-

le cagioni che tendono a diminuire il valore del secondo. Bisognerebbe porre nella prima linea di questo conto gli urti che potrebbero aver luogo nella trasfusione della forza, se ogni costruttore di mezzana perizia non sapesse provvedere ai modi di sottrarre le macchine da simili rapide sottrazioni di velocità e quindi di forza viva. Ma non è lo stesso degli attriti, della resistenza dell' aria, e di qnei movimenti vibratorii che il giuoco stesso della macchina eccita nei suoi diversi organi, dai quali poi vanno dispersi nel suolo per la via de' sostegni. Queste cagioni, che consumano inutilmente una parte del lavoro motore, potranno esser diminuite, ma giammai distrutte; e perciò fa d' uopo considerare il lavoro resistente come composto di due parti, l' una rappresenterà l' effetto della resistenza che si vuol superare, l'altra indicherà la perdita che il lavoro motore dovrà soffrire prima di produrre l' effetto richiesto. Indicheremo la prima con Lu, poichè rappresenta il lavoro utile, e l' altra che va perduta rispetto all' effetto voluto, dinoteremo con Lp. Avremo così l' equazione

$$Lr = Lu + Lp,$$

dalla quale si rileva che nelle macchine, come quelle destinate alla filatura del cotone, alla fabbrica dei merletti, ecc., nelle quali Lu è così piccolo da doversi avere per nullo, Lr si riduce interamente al valore di Lp.

Dalla stessa equazione si rileva ancora che in una macchina si avrà tanta maggiore economia di forza motrice, per quanto Lu sarà più grande rispetto ad Lp; vale a dire per quanto la frazione $\frac{Lu}{Lr}$ sarà meno differente dall' unità. Questa frazione ha ricevuto il nome di *effetto utile*.

Ed in fine osserviamo che quantunque Lu fosse assolutamente nullo, Lr non potrebbe divenir eguale a zero, senza che lo fosse Lp. L' attuazione dunque di un moto perpetuo non può concepirsi possibile se non da coloro che sono interamente ignari delle leggi mecchaniche.

320. Se la frazione di lavoro motore, che perviene al sistema operatore, pareggiasse costantemente il lavoro resistente, sarebbe $Lm - Lr = 0$; quindi $v = w$; ed allora si avrebbe, ciò che ordinariamente si desidera, il moto uniforme della macchina. Se poi Lm superasse Lr, i valori di v andrebbero crescenti, e la macchina acquisterebbe un moto accelerato. Ad impedire quest' accelerazione, quasi sempre nociva all' integrità della macchina ed alla buona qualità del prodotto, servono i *regolatori*, per opera dei quali il lavoro motore rimane ristretto fra certi limiti.

321. Talvolta la genesi stessa dell' azione motrice fa che essa alterni tra due direzioni diametralmente opposte; e che in conseguenza la sua energia vada continuamente oscillando tra un massimo ed un minimo. Un' eguale alternativa si produrrebbe nell' andamento del sistema operatore; quindi degli urti, nocivi alla macchina ed al suo lavoro utile, ed un prodotto malamente eseguito ne sarebbero gli effetti. Tanto danno si evita coll' aggiunzione di un *volante*, ossia di una grande ruota che confonde il suo asse coll' albero su cui agisce immediatamente il sistema motore. Ne viene così aumentato il momento d' inerzia, e quindi per dati cangiamenti nel valore della coppia impressa al sistema, si avranno minori variazioni nel valore della celerità angolare espressa dall' equazione

$$\theta = \frac{N}{\int r^2 dm} .$$

322. Non potremmo tener dietro a tutte le conseguenze che si possono trarre dal principio delle forze vive applicato al moto delle macchine, senza trascorrere i limiti che la natura istessa di quest' opera ci prescrive. Abbiamo voluto esaminarne soltanto le principali, perchè chiaramente si potesse rilevare come il principio delle forze vive renda la Meccanica razionale applicabile alle quistioni industriali.

F I N E.

INDICE.

LIBRO PRIMO

STATICA.

LIBRO SECONDO

DINAMICA.

ERRATACORRIGE.

Pag.	*Ver.*	*Errori.*	*Correzioni.*
15	32	$2(\pi-\varphi)$	$\pi-2\varphi$
30	7	$\cos c=\frac{R}{Z}$	$\cos c=\frac{Z}{R}$
57	13	(*pag.* 25)	(*pag.* 52)
61	ultimo	$\delta:\delta'$	$\delta':\delta$
67	12	$-\frac{a}{32}\overset{e}{\log}$	$-\frac{a^2}{32}\overset{e}{\log}$
68	ultimo	$\text{arco.sen ver}\ \frac{x}{a}$	$a.\text{arco sen ver}\ \frac{x}{a}$
71	13	$\int_0^{y'}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$	$\int_0^{y'}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$
73	10	$\frac{z}{a}$	$\frac{a}{z}$
74	13	$Y=$	$Z=$
86	5	$-\frac{1}{2}\,\text{sen}\varphi$	$-\frac{1}{2}\text{sen}^2\varphi$
—	13	$\int_0^{\varphi}y^2dx=$	$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}y^2dx$
—	15	$\frac{4}{3}\pi^2a^3-\frac{4}{3}a^3$	$\frac{3}{4}\pi^2a^3-\frac{4}{3}a^3$
88	11	$\frac{2}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}p\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
—	13	$\frac{1}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C$	$\frac{2}{5}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}p\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C$
—	penult.	$dx\sqrt{\frac{a}{x}-1}$	$dx\sqrt{\frac{2a}{x}-1}$
89	6	$4\pi a^2-\frac{2}{3}(2a)^2$	$4\pi a^2-\frac{4}{3}(2a)^2$
131	13	giocare	giacere
141	ultimo	$y_1=\frac{\Sigma Py}{P}$	$y_1=\frac{Py}{P}$
164	9	$a,\ \beta,\ \alpha'$	$\alpha,\ \beta,\ \alpha'$
169	20	$P=T\frac{ds}{r}$	$Pds=T\frac{ds}{r}$
—	penult.	nulle componenti	nulle le componenti
172	11	$hx==\overset{e}{\log}\text{tang}\frac{1}{2}\psi$	$hx=-\overset{e}{\log}\text{tang}\frac{1}{2}\psi$
174	12	equazioni (1) del n° 90	equazioni (1) del n° 91
—	15	$\frac{dy}{\int\ \ ds}$	$\frac{dy}{\int Yds}$

189	antipenult.		(si aggiunga $=0$)
190	6		(si aggiunga $=0$)
192	12	$e^{hx}e^{i}+e^{-hx-i}$	$e^{hx}e^{i}+e^{-hx}e^{-i}$
—	15	(Manca il fattore $\frac{1}{2}$ ai due membri della 2ª equazione)	
—	22	$-\frac{1}{2}A\alpha$	$-\frac{1}{4}A\alpha$
198	24 e 29	$\int yds$	$\int Yds$
199	14	$T=\cos(\varphi-\psi)$	$T=R\cos(\varphi-\psi)$
202	penult.	$-\frac{13z^3}{32\sqrt{2}}$	$-\frac{5z^3}{32\sqrt{2}}$
203	4	$\sqrt{\frac{k}{A}}\cdot\frac{dy}{h^2-y^2}$	$\sqrt{\frac{k}{A}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{h^2-y^2}}$
229	10	ρXdm , ρYdm , ρZdm	Xdm , Ydm, Zdm
242	20	$\frac{3q+p}{2q+p}\,a.$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3q+p}{2q+p}\,a.$
253	18	$\pi\,\frac{p-f}{0^m,66\Pi}$	$\pi\,\frac{p-f}{0^m,76\Pi}$
—	21	$\frac{\pi f}{0^m,06\Pi}$	$\frac{\pi f}{0^m,76\Pi}$
256	13	$\left(1+\frac{r}{z}\right)^2$	$\left(1+\frac{z}{r}\right)^2$
276	17	$-\frac{1}{2}\varphi t^2$	$-\frac{1}{2}\varphi\theta^2$
285	13	che ad a ed r	che a ed r
290	12	le	la
293	9	equale	eguale
294	ultimo	allova	allora
296	18	variaaile	variabile
298	24	al punto B	al punto D
304	3	$2dxd^2y+dyd^2y+dzd^2z$	$2dxd^2x+2dyd^2y+2dzdz^2$
304	22	restistenza	resistenza
311	9	*indirezione*	*in direzione*
313	13	eliminando a	eliminando α
—	14	$\frac{a^2\text{sen}\alpha}{2g}$	$\frac{a^2\text{sen}^2\alpha}{2g}$
318	15	$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$	$\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}$
—	17	$\int\frac{dx}{\cos^3\alpha}$	$\int\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}$
319	5	$\frac{1}{2}C=\gamma$	$2C=\gamma$
320	15	$gs^{2ks}ds$	$ge^{2ks}ds$

—	17	$e^{2ks}ds$	$e^{-2ks}ds$
324	5	rame	ramo
328	16	$\frac{xdy-ydx}{x^2\cos^2\theta}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}\cos^2\theta$
336	14	equall' equazione	equazione
350	penult.	costituendovi	sostituendovi
355	ultimo	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{n-1}$
356	5	$\int_0^k \frac{z^{n-1}}{\sqrt{kz-z^2}}$	$\int_0^k \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{kz-z^2}}$
—	8	$\int_0^k \frac{z^n da}{\sqrt{kz-z^2}}$	$\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz-z^2}}$
—	9	$(3n-1)$	$(2n-1)$
—	11	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$	$\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$
364	7	$t'=\sqrt{\frac{a}{g}}$	$t'=\sqrt{\frac{4a}{g}}$
—	27	$\frac{mn}{v_1}-$	$\frac{mn}{v_1}=$
365	9	$\frac{dy}{\sqrt{dy^2+dy^2}}$	$\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$
366	17	arcosenver $\frac{2x}{a}$	arcosenver $\frac{2\alpha}{a}$
371	6	$\sqrt{cdx}$	$\sqrt{c}.dx$
372	5	$\sqrt{\left(\frac{c}{x-k}\right)^{-}-1}$	$\sqrt{\left(\frac{c}{x-k}\right)^{-2}-1}$
374	8	n° 114	n° 214
375	9	$\frac{d\alpha}{dx}$	$\frac{da}{dx}$
377	ultimo	$-\frac{1}{2}gt^2$	$-\frac{1}{2}Agt^2$
379	21	$-P\frac{z}{a}$	$g-P\frac{z}{a}$
380	11	(12)	(14)
382	17	$\sqrt{a-z^2}$	$\sqrt{a^2-z^2}$
—	24	(13)	(15)
390	9	$\alpha^2\cos\theta$	$\alpha^2\cos^2\theta$
—	19	$\alpha^2x^2+\gamma^2y$	$\alpha^2y^2+\gamma^2x^2$
412	30	ll	il

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni
413	12	momendo	momento
415	2	$+(x^2+y^2)\cos\gamma$	$+(x^2+y^2)\cos^2\gamma$
—	3	$-2yx\cos\beta\cos\gamma$	$-2yz\cos\beta\cos\gamma$
437	30	L'azione	l' azione
448	20	di $2b$	l' estremità di $2b$
452	11	$C\frac{dr}{di}$	$C\frac{dr}{dt}$
454	10	$\frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$
—	16	$2g\,\text{sen}\varphi+C$	$2gl\,\text{sen}\varphi+C$
—	23	identica quella	identica a quella
458	1	medesime	medesimo
461	17	fuggerebbero	fuggirebbero
466	10	$v\theta\,\text{sen}\,0\,dt^2$	$v\theta\,\text{sen}\varphi\,dt^2$
468	5	con-	com-
470	6	$\frac{d^2x'}{di^2}$	$\frac{d^2x'}{dt^2}$
—	13	$\frac{d^4\xi}{dt^2}=2\theta\cos\lambda\frac{d\zeta}{dt}+2\theta\,\text{sen}\lambda\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$\frac{d^2\xi}{dt^2}=2\theta\cos\lambda\frac{d\zeta}{dt}+2\theta\,\text{sen}\lambda\frac{d\eta}{dt}$
473	2	$(b-2\theta\cos\lambda.\xi)$	$(b-2\theta\,\text{sen}\lambda.\xi)$
474	3	$\lambda=0$	$\eta=0$
—	20	(6)	(5)
483	24	$\frac{dw}{dx}$	$\frac{dw}{dz}$
489	14	$-\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)$	$-\frac{1}{2}\rho(v_2-v_0^2)$
567	ultimo	$+Rr$	$+R^2r^2$
568	12	tutti	tutte
569	10	$\int\frac{d\eta}{dt}dm=0,\ \int\frac{d\eta}{dt}dm=0.$	$\int\frac{d\eta}{dt}dm=0,\ \int\frac{d\zeta}{dt}dm=0$
571	10	*piono*	*piano*
575	2	di silenzio	in silenzio
—	9	del quadrato	pel quadrato
578	9	il loro lavoro	il lavoro

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Napoli 20 Luglio 1853.

Vista la dimanda del tipografo Ferdinando Raimondi , il quale ha chiesto di porre a stampa l' opera intitolata: *Meccanica Razionale* di Michele Zannotti.

Visto il parere del Regio Revisore Signor D. Francesco Bruno.

Si permette che la indicata opera si stampi ; ma non si pubblichi senza un secondo permesso , che non si darà , se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto, nel confronto , essere la impressione uniforme all' originale approvato.

Il Presid. F. S. APUZZO. — *Il Seg.* GIUSEPPE PIETROCOLA.

Tav II
31.
34.
36.
40.
42.
46.
48.
51.
L. Ricci inc

y
h
E
t
θ
m
P
Z
P'
h
Z
n
p
Q
a
c
n
b
B
a
T
R
b'
A
A^n
c^n
S
S
L. Rico inc

Tav. IV.

Tav. V.

Tav. VI.